BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 60

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 60

1. Subiectul I

Rezolvare.

(a) $\operatorname{re}(2-i)^2 = \operatorname{re}(4-1-4i) = \boxed{3}$.

(b) Cu formula distanţei (teorema lui Pitagora) obţinem $|AC| = \sqrt{(7-6)^2+(6-7)^2} = \boxed{\sqrt{2}}$.

(c) $\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}$.

(d) Simetricul punctului $A(2,2)$ faţă de axa Oy este punctul $A'(-2,2)$.

(e) Aria triunghiului este $S = \frac{|\Delta|}{2}$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 3$. Deci $\boxed{S = \frac{3}{2}}$.

(f) Punctul $(2,1)$ aparţine elipsei deoarece coordonatele sale îi verifică ecuaţia: $\frac{2^2}{8} + \frac{1^2}{2} = 1$. Prin dedublare, ecuaţia tangentei în acest punct la elipsă este

$$\frac{2\cdot x}{8} + \frac{1\cdot y}{2} = 1 \iff \boxed{\tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{2}y = 1}.$$

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Elementul $\hat{3}$ este inversabil în $\mathbb{Z}_4$, inversul să fiind $\hat{3}^{-1} = \hat{3}$. Atunci

$$\hat{3}\hat{x} = \hat{2} \iff \hat{x} = \hat{3}\cdot\hat{2} \iff \boxed{\hat{x} = \hat{2}}$$

(b) Avem $(f\circ g)(3) = f(g(3)) = f(3-2) = f(1) = 1^2 = \boxed{1}$.

(c) Rezolvăm ecuaţia descompunând în factori membrul stâng:

$$x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \iff (x^2-1)(x^2-2) = 0 \iff \boxed{x \in \{-1, 1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}}$$

(d) **Prima soluţie.** Notând cu $t = 2^x$ ecuaţia devine

$$t + t^3 = 0 \iff t^3 + t - 10 = 0 \iff t^3 - 8 + t - 2 = 0 \iff (t-2)(t^2+2t+5) = 0.$$

Factorul pătratic este ireductibil, deoarece are discriminantul negativ: $\Delta = 4 - 20 = -16$. Rezultă $t = 2$, sau $2^x = 2$, de unde $\boxed{x = 1}$.
A doua soluţie. Funcţia $u(x) = 2^x + 8^x$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, deci injectivă. Ecuaţia se rescrie $u(x) = u(1)$, de unde $\boxed{x = 1}$.

(e) Examinând tabelul

n	1	2	3	4	5
3^n	3	9	27	81	243
n^3	1	8	27	64	125

constatăm că $3^n > n^3$ pentru $n \in \{1, 2, 4, 5\}$. Probabilitatea căutată este $\boxed{p = \frac{4}{5}}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) Avem $\boxed{f'(x) = e^x + 1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b)
$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (e^x + x + 1)\,dx = \left(e^x + \frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_0^1 = \boxed{e + \frac{1}{2}}.$$

(c) Limita din enunţ este tocmai derivata funcţiei f în $x = 0$, adică $\boxed{f'(0) = 2}$.

(d) Studiem semnul derivatei a doua a lui f. Avem $f''(x) = e^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, aşadar f este convexă pe $\mathbb{R}$.

(e) Vom da factor forţat pe n^2 atât la numărător cât şi la numitor. Obţinem
$$\lim_{n\to\infty} \frac{8n^2 + 5}{2n^2 + 7} = \lim_{n\to\infty} \frac{8 + \frac{5}{n^2}}{2 + \frac{7}{n^2}} = \frac{8 + 0}{2 + 0} = \boxed{4}.$$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Pentru $a = 1 \in (0, \infty)$ şi $b = 0$ obţinem $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} = I_2 \in G$.

(b) Fie $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & 1 \end{pmatrix} \in G$. Reamintim că $a, a' \in (0, \infty)$. Atunci
$$AB = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & 0 \\ ba' + b' & 1 \end{pmatrix} \in G$$
deoarece $aa' > 0$.

(c) Fie $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \in G$. Atunci $\det A = a > 0$.

(d) Verificăm propoziţia

$$A \in G \;\Rightarrow\; A \text{ este inversabilă şi } A^{-1} \in G.$$

Într-adevăr, fie $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \in G$. Din punctul precedent, A este inversabilă iar $\det A = a$. Dar $A^T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b & a \end{pmatrix}$. Deci $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ -b/a & 1 \end{pmatrix} \in G$, deoarece $1/a > 0$.

(e) Nu trebuie să căutăm acul în carul cu fân. Folosind formula de la (b), singura şansă pentru ca să găsim două matrici $S, T \in G$ cu $ST \neq TS$ este ca coeficienţii lor de pe a doua linie şi prima coloană să fie diferiţi. Cu alte cuvinte, cu notaţiile de la (b), ar trebui ca $ba' + b' \neq b'a + b$. Astfel, putem alege $a = 1$, $b = 1$ şi $a' = 2$. Luăm şi $b' = 0$. Astfel, dacă $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ atunci $ST = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = TS$.

(f) Fie $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$. Atunci $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ b + ba & 1 \end{pmatrix}$. Demonstrăm uşor prin inducţie faptul că $A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ b(1 + a + \ldots + a^{n-1}) & 1 \end{pmatrix}$, $\forall n \mathbb{N}^*$. ▼[detalii]

Propoziţia este verificată pentru $n = 1$ şi chiar $n = 2$. Presupunând-o adevărată pentru $n \in \mathbb{N}^*$, avem

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ b(1 + a + \ldots + a^{n-1}) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n + 1 & 0 \\ ba^n + b(1 + a + \ldots + a^{n-1}) & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ b(1 + a + \ldots + a^n) & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conform principiului inducţiei matematice rezultă că propoziţia este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

(g) Fie $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \in G$ şi fie $n \in \mathbb{N}^*$. Avem de rezolvat în G ecuaţia $X^n = A$. Fie $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}$. Cu formula de la punctul precedent avem

$$X^n = A \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} x^n & 0 \\ y(1 + x + \ldots + x^{n-1}) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = a^{1/n} \\ y = \dfrac{b}{1 + a^{1/n} + a^{2/n} + \ldots + a^{(n-1)/n}} \end{cases}$$

Am folosit implicit ipoteza $a > 0$, ceea ce face ca toate operaţiile de mai sus să aibe sens.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) $\boxed{f(-1) = 9}$ şi $\boxed{g(-1) = 0}$.

(b) Pentru $x = -1$ ambrii membri sunt nuli. Pentru $x \neq 1$, formula $(x+1)(1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots+x^8) = x^9+1$ provine din suma unei progresii geometrice cu nouă elemente, de raţie $-x$ ce are primul termen egal cu 1.

(c) Funcţia g este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ (deoarece derivata ei este $g'(x) = 9x^8 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$). Deoarece $g(-1) = 0$ rezultă $g(x) \begin{cases} < 0 & , x < -1 \\ > 0 & , x > -1 \end{cases}$, q.e.d.

(d) Pentru $x \neq -1$ observăm că $f(x) = \dfrac{g(x)}{x+1} > 0$ deoarece, din punctul precedent, numărătorul şi numitorul din membrul drept **au acelaşi semn**. Cazul rămas se verifică direct: $f(-1) = 9 > 0$.

(e) Prin verificare directă avem, pentru orice $x \in \mathbb{R}$:

$$F'(x) = 1 - \frac{2x}{2} + \frac{3x^2}{3} - \frac{4x^3}{4} + \ldots + \frac{9x^8}{9} = f(x)$$

(f) Combinând punctele (e) şi (d), deoarece $F'(x) = f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ rezultă faptul că F este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

(g) O consecinţă a punctului precedent este că funcţia F este **injectivă**. Dar F este **funcţie polinomială de grad impar**, prin urmare este şi surjectivă, q.e.d. ▼[detalii]

F este surjectivă deoarece

(1) $\lim\limits_{c \to -\infty} F(x) = -\infty$.

(2) $\lim\limits_{c \to \infty} F(x) = \infty$.

(3) F este continuă pe $\mathbb{R}$, deci are proprietatea lui Darboux.