BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 5

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 5

1. Subiectul I

Rezolvare.

(a) Mijlocul segmentului AB este punctul $M(x_M, y_M)$, unde

$$x_M = \frac{2+1}{2} = \boxed{\frac{3}{2}}, \quad y_M = \frac{0+1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

(b) Aria triunghiului este $S = \dfrac{|\Delta|}{2}$, unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4,$$

de unde $\boxed{S = 2}$.

A doua soluţie. Deoarece

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-\vec{i} + \vec{j}) \cdot (-2\vec{i} - 2\vec{j}) = 0,$$

triunghiul este dreptunghic în A. Calculăm

$$|AB| = \sqrt{(1-2)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$$

respectiv

$$|AC| = \sqrt{(0-2)^2 + (-2-0)^2} = 2\sqrt{2}.$$

Atunci $S = \dfrac{|AB| \cdot |AC|}{2} = \boxed{2}$.

(c) $|BC| = \sqrt{(0-1)^2 + (-2-1)^2} = \boxed{\sqrt{10}}$.

(d) Punctul A aparţine dreptei date dacă şi numai dacă coordonatele sale îi verifică ecuaţia. Obţinem

$$0 = 2 - a \iff \boxed{a = 2}.$$

(e) **Prima soluţie.** Aria triunghului mai poate fi exprimată prin formula $S = \dfrac{|AB| \cdot |AC| \cdot \sin \widehat{ABC}}{2}$, de unde

$$\sin \widehat{ABC} = \frac{2S}{|AB| \cdot |BC|} = \frac{2 \cdot 2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{10}} = \boxed{\frac{2}{\sqrt{5}}}.$$

A doua soluţie. Ţinând cont de faptul că triunghiul este dreptunghic în A rezultă

$$\sin \widehat{ABC} = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \boxed{\frac{2}{\sqrt{5}}}.$$

(f) **Prima soluţie.** În orice triunghi raza cercului circumscris este $R = \dfrac{|AC|}{2\sin \widehat{ABC}}$.

În cazul de faţă,

$$R = \frac{2\sqrt{2}}{2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}} = \boxed{\frac{\sqrt{10}}{2}}.$$

A doua soluţie. Raza cercului circumscris unui triunghi dreptunghic este jumătate din lungimea ipotenuzei. Deci $R = \frac{|BC|}{2} = \boxed{\dfrac{\sqrt{10}}{2}}$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Mulţimea $\{5, 7, 9\}$
- are 3 elemente.
- are $C_3^2 = 3$ submulţimi cu două elemente.
- are $C_3^1 = 3$ submulţimi cu un element.
- are $C_3^0 = 1$ submulţimi cu nici un element (mulţimea vidă).

Deci mulţimea dată are $3 + 3 + 1 = \boxed{7}$ submulţimi cu cel mult două elemente.

(b) Deoarece $2 = \lg_2 4 < \log_2 6 < \log_2 8 = 3$ rezultă $[\log_2 6] = \boxed{2}$.

(c) Funcţia liniară din enunţ are coeficientul dominant negativ, deci este descrescătoare. Rezultă

$$\max_{x\in[1,3]} f(x) = \boxed{f(1) = 3}.$$

(d) Din ipoteză avem $0 = i^2 + ai + 1 = -1 + ai + 1 = ai$, deci $\boxed{a = 0}$.

(e) Rangul matricii în cauză este unu dacă şi numai dacă matricea nu este inversabilă. Cu alte cuvinte,

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ 2 & a-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot (a-1) - 2 \cdot a = 0 \Leftrightarrow -a - 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = -1}.$$

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) Intersecţia graficului funcţiei f cu axa Oy este punctul

$$(0, f(0)) = \boxed{(0,2)}.$$

(b) Avem

$$f'(x) = -\frac{2}{(x^2+1)^2} \cdot 2x = \boxed{-\frac{4x}{(x^2+1)^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(c) Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{x^2+1} = 0$, graficul funcţiei admite către ∞ asimptota orizontală de ecuaţie $\boxed{y = 0}$.

(d) Având un caz de nedeterminare de tip $\frac{\infty}{\infty}$, folosim regula lui l'Hopital:

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) \cdot \ln x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^2} = \boxed{0}.$$

(e) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{2}{x^2+1}\,dx = 2\text{arctg}\, x\Big|_{-1}^{1} = 2\left[\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \boxed{\pi}.$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Într-adevăr, pentru orice $x, y \in \mathbb{C}$ avem

$$A(x)A(y) = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy & 0 & 2xy \\ 0 & 0 & 0 \\ 2xy & 0 & 2xy \end{pmatrix} = A(2xy).$$

Profităm de ocazie pentru a observa că $A(x)A(y) = A(y)A(x)$, deci oricare două matrici din M comută.

(b) Pentru orice $x \in \mathbb{C}$ avem de verificat:

$$A(x)A\left(\frac{1}{2}\right) = A\left(2x \cdot \frac{1}{2}\right) = A(x),$$

adică $A\left(\frac{1}{2}\right)$ este element neutru faţă de operaţia de înmulţire a a matricilor din M.

(c) Folosind din nou formula de la (a), deoarece

$$A\left(\frac{1}{4}\right)A(1) = A(1)A\left(\frac{1}{4}\right) = A\left(2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4}\right) = A\left(\frac{1}{2}\right),$$

simetricul elementului $A(1)$ este $\boxed{A\left(\frac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}}$.

(d) Folosim identitatea de la (a). Fie $x, y \in \mathbb{C}$. Atunci

$$\begin{aligned} f(x)f(y) &= \frac{1}{2}A(x)\frac{1}{2}A(y) = \frac{1}{4}A(x)A(y) = \frac{1}{4}A(2xy) \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2xy & 0 & 2xy \\ 0 & 0 & 0 \\ 2xy & 0 & 2xy \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} xy & 0 & xy \\ 0 & 0 & 0 \\ xy & 0 & xy \end{pmatrix} = \frac{1}{2}A(xy) \\ &= f(xy)\,. \end{aligned}$$

(e) Pentru orice $x \in \mathbb{C}$, folosind (de două ori) punctul precedent, avem

$$f(x^3) = f(x \cdot x \cdot x) = f(x)f(x)f(x) = f(x)^3\,,$$

q.e.d.

(f) Fie $x, y \in \mathbb{C}$. Avem

$$f(x) = f(y) \iff A(x) = A(y) \iff \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & y \end{pmatrix} \iff x = y\,.$$

Aşadar funcţia f este injectivă.

(g) Folosind injectivitatea demonstrată la punctul precedent, precum şi identitatea de la (e), obţinem

$$[f(x)]^3 = f(1) \iff f(x^3) = f(1) \iff x^3 = 1\,.$$

Soluţiile complexe ale acestei ecuaţii sunt cele trei rădăcini complexe ale unităţii:

$$\boxed{x \in \left\{1, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right\}}\,.$$

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Ni s-a dat totul mură-n gură direct din enunţ:

$$f_1(\sin x) = -4\sin^3 x + 3\sin x = \sin 3x, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

(b) Folosind punctul precedent obţinem

$$f_2(\sin x) = f_1(f_1(\sin x)) = f_1(\sin 3x) = f_1(\sin 9x), \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

(c) Propoziţia din enunţ a fost demonstrată pentru $n = 1$ şi $n = 2$ la punctele precedente. Presupunând propoziţia adevărată pentru n, obţinem că propoziţia este adevărată şi pentru $n + 1$:

$$f_{n+1}(\sin x) = f_n(f_1(\sin x)) = f_n(\sin 3x) = \sin(3^n \cdot 3x) = \sin 3^{n+1}x, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Conform principiului inducţiei propoziţia este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

(d) Fie $k \in \mathbb{N}^*$. Atunci

$$\begin{aligned} l_k &= \lim_{x\to 0}\frac{f_k(\sin x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3^k x}{x} \\ &= 3^k \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3^k x}{3^k x} = 3^k \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} \\ &= 3^k\cdot 1 = \boxed{3^k}. \end{aligned}$$

(e) Folosind punctul precedent obţinem imediat că

$$\frac{l_1+l_2+\ldots+l_n}{3^{n+1}} = \frac{3+3^2+\ldots+3^n}{3^{n+1}} = \frac{\frac{3^{n+1}-3}{2}}{3^{n+1}} = \frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{3^n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \boxed{\frac{1}{2}}.$$

(f) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f_1(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi/2}\sin 3x\,dx = -\frac{\cos 3x}{3}\Big|_0^{\pi/2} = \boxed{\frac{1}{3}}.$

(g) Facând substituţia $y = \frac{\pi}{2} - x$, avem $\cos x = \sin y$ şi $dx = -dy$. Atunci

$$\int_0^{\pi/2} f_1(\cos x)\,dx = \int_{\pi/2}^{0} f_1(\sin y)\cdot(-1)\,dy = \int_0^{\pi/2} f_1(\sin y)\,dy = \frac{1}{3}.$$

Egalitatea din final este exact cea de la punctul (f).

Pro Didactica vă urează succes la BAC.
De la toamnă vă aşteptăm cu întrebări din materia de facultate.