BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 59

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 59

1. Subiectul I

Rezolvare.

(a) $\overline{1+7i} = \boxed{1-7i}$.

(b) Distanţa de la punctul $D(-1,-2)$ la dreapta $x+y-4=0$ este

$$\mathbf{d} = \frac{|1\cdot(-1)+1\cdot(-2)-4|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \boxed{\frac{7}{\sqrt{2}}}.$$

(c) Dreapta din enunţ conţine punctele A şi B dacă şi numai dacă coordonatele lor îi verifică individual ecuaţia. Obţinem sistemul:

$$\begin{cases} a+2b+2=0 \\ 2b+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-2+2=0 \\ b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} a=0 \\ b=-1 \end{cases}}.$$

(d) Deoarece $\overrightarrow{LM} = (-1,1) = \overrightarrow{MN}$, vectorii $\overrightarrow{LM}$ şi $\overrightarrow{MN}$ sunt paraleli (de fapt egali), deci punctele L, M şi N sunt colineare.

(e) Lungimea laturii pătratului este $l = \frac{20}{4} = 5$, deci diagonala are lungimea $\boxed{5\sqrt{2}}$.

(f) Fie x lungimea laturii triunghiului echilateral din enunţ. Atunci aria sa, exprimată în funcţie de x, este $S = \frac{x\cdot x\cdot\sin 60^\circ}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$. Din ipoteză avem $S = 16\sqrt{3}$, de unde $x^2 = 64$, adică $x = 8$. Aşadar perimetrul triunghiului este $3\cdot 8 = \boxed{24}$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Al patrulea termen al unei progresii geometrice de raţie $q=2$ şi prim termen $a_1 = -2$ este $a_4 = (-2)\cdot 2^{4-1} = \boxed{-16}$.

(b) Din tabelul

n	0	1	2	3	4
$n+9$	9	10	11	12	13
3^n	1	3	9	27	81

constatăm că inegalitatea $n+9 < 3^n$ este satisfăcută de două numere din cinci, anume $n \in \{3,4\}$. Probabilitatea căutată este deci $\boxed{p = \frac{2}{5}}$.

(c) Avem $g(2) = x \Leftrightarrow f(x) = 2 \Leftrightarrow x+1 = 2 \Leftrightarrow \boxed{x=1}$.

(d) $\log_2(x^2+7)=3 \Leftrightarrow x^2+7=2^3=8 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow \boxed{x\in\{-1,1\}}$.

(e) Folosind prima relaţie a lui Viète obţinem

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{0}{1}=\boxed{0}.$$

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) $\boxed{f'(x)=3x^2-3}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

(b) Din teorema Leibnitz–Newton rezultă

$$\int_0^1 f'(x)\,dx=f(1)-f(0)=\boxed{-2}.$$

(c) Studiind semnul derivatei funcţiei f obţinem tabela de variaţie

x	$-\infty$		-1		1		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Aşadar $\boxed{x=-1}$ este punct de maxim iar $\boxed{x=1}$ este punct de minim. Cele două puncte de extrem nu sunt globale, deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ respectiv $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

(d) Limita din enunţ este exact derivata funcţiei f în $x=1$, adică $\boxed{f'(1)=0}$.

(e) Avem

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{5x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x+10}{5x^3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{5}-\frac{3}{5x^2}+\frac{2}{x^3}\right)=\boxed{\frac{1}{5}}.$$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Este clar că $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1-1\\0&1\end{pmatrix}\in H$.

(b) Fie $X=\begin{pmatrix}a&b\\0&1\end{pmatrix}$ şi $Y=\begin{pmatrix}c&d\\0&1\end{pmatrix}$ două matrici arbitrare din G. Atunci $a,c\in\mathbb{R}^*$ şi

$$XY=\begin{pmatrix}a&b\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c&d\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ac&ad+b\\0&1\end{pmatrix}\in G,$$

deoarece $ac\in\mathbb{R}^*$.

(c) Procedăm ca la punctul precedent. Fie $X = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} c & 1-c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$. Atunci $a, c \in \mathbb{R}^*$ şi

$$XY = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 1-c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & a\cdot(1-c)+(1-a)\cdot 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & 1-ac \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H\,,$$

deoarece $ac \in \mathbb{R}^*$.

(d) Avem

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -b+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{I_2}\,.$$

Prin urmare B este inversa matricii A, deci avem şi relaţia $BA = \boxed{I_2}$.

(e) Folosind propoziţia de la punctul precedent, dacă $X = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$, atunci X este inversabilă, iar

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1-a}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 1-\frac{1}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H\,.$$

(f) Funcţia $\phi : \mathbb{R}^* \to H$ definită prin $\phi(a) = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ este evident bijectivă. Pe de altă parte, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}^*$ avem

$$\phi(a)\phi(b) = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 1-b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & 1-ab \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \phi(ab)\,,$$

deci H este grup comutativ **izomorf cu** $\mathbb{R}^*$, iar izomorfismul este implementat de către ϕ.

(g) Folosind funcţia introdusă la punctul precedent, pentru orice $a \in \mathbb{R}^*$ avem

$$\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{2007} = \phi(a)^{2007} = \phi\left(a^{2007}\right) = \boxed{\begin{pmatrix} a^{2007} & 1-a^{2007} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}\,.$$

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Evident $a_1 = f(1) = \boxed{\ln 2}$.

(b) Deoarece

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln(1+0) = 0\,,$$

asimptota către ∞ la graficul lui f este dreapta de ecuaţie $\boxed{y=0}$.

(c) Într-adevăr,

$$\ln(x+1) - \ln x = \ln\frac{x+1}{x} = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = f(x), \quad \forall x \in (0,\infty)\,.$$

(d) $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = \boxed{-\frac{1}{x(x+1)}}$, $\forall x \in (0, \infty)$.

(e) Propoziţia este trivial adevărată pentru $n = 1$ (cazul a fost tratat la punctul (a)). Presupunând propoziţia adevărată pentru un anumit $n \in \mathbb{N}^*$, rezultă

$$a_{n+1} = a_n + f(n+1) = \ln(n+1) + \ln\frac{n+2}{n+1} = \ln(n+2)\,,$$

aşadar propoziţia este adevărată şi pentru $n+1$. Conform principiului inducţiei matematice, propoziţia este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

(f) Din punctul precedent şi proprietăţile de bază ale funcţiei logaritm rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \boxed{\infty}$.

(g) Integrând prin părţi obţinem

$$\begin{aligned}\int_1^2 f(x)\,dx &= \int_1^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx \\ &= x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2 - \int_1^2 x\cdot\frac{-1}{x(x+1)}\,dx \\ &= \ln\frac{9}{8} + \int_1^2 \frac{1}{x+1}\,dx \\ &= \ln\frac{9}{8} + \ln|x+1|\Big|_1^2 = \boxed{\ln\frac{27}{16}}.\end{aligned}$$