BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 58

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 58

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Partea reală a numărului $i + 2i^2 + 3i^3 = i - 2 - 3i = -2 - 2i$ este $\boxed{-2}$.

(b) $AC = \sqrt{(1-2)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{1+1} = \boxed{\sqrt{2}}$

(c) Calculăm şi lungimile celorlalte două laturi

$$AB = \sqrt{(1+3)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$$

$$BC = \sqrt{(-3-2)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

Observăm că $BC^2 = AB^2 + AC^2$, deci triunghiul ABC este dreptunghic, cu ipotenuza BC.

(d) Aria unui triunghi dreptunghic este egală cu jumătate din produsul catetelor, adică

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{32} \cdot \sqrt{2} = \boxed{4}$$

(e) Coordonatele celor două puncte trebuie să verifice ecuaţia dreptei. Obţinem sistemul

$$\begin{cases} -3 + m + n &= 0 \\ 2 + 4m + n &= 0 \end{cases}$$

Scăzând din prima ecuaţie pe a doua, vom avea $-5 - 3m = 0 \Rightarrow m = \boxed{-\frac{5}{3}}$.

Substituind în prima ecuaţie, avem $n = 3 - m = 3 + \frac{5}{3} = \boxed{\frac{14}{3}}$.

(f) Într-un triunghi dreptunghic, cosinusul unui unghi ascuţit este egal cu raportul dintre cateta alăturată şi ipotenuză. Deci

$$\cos \widehat{CBA} = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{34}} = \boxed{\frac{4\sqrt{17}}{17}}$$

2. Subiectul II.1

Rezolvare.

(a) Ecuaţia se scrie, echivalent,

$$3^{9x} = (3^2)^{2007} \Leftrightarrow 3^{9x} = 3^{4014} \Leftrightarrow 9x = 4014 \Leftrightarrow \boxed{x = 446}$$

(b) Primul termen al progresiei este $a_1 = 3$, iar raţia $r = 7 - 3 = 4$. Atunci $a_{10} = a_1 + 9r = 3 + 36 = \boxed{39}$.

(c) Un număr cu cel puţin 2 cifre se divide la 4 dacă şin numai dacă numărul format din ultimele 2 cifre se divide la 4. Singurele numere de două cifre formate cu cifrele date care se divid la 4 sunt 20, 12 şi 52. Numerele cerute în enunţ sunt $120, 520, 512, 152$, deci în număr de $\boxed{4}$.

(d) Prin calcul direct $(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(2 \cdot 1 - 1) = f(1) = \boxed{1}$.

(e) Inecuaţia se scrie

$$x \cdot \frac{5!}{3!2!} \leq 100 \Leftrightarrow x \cdot 10 \leq 100 \Leftrightarrow x \leq 10 \Leftrightarrow \boxed{x \in (-\infty, 10]}$$

3. Subiectul II.2

Rezolvare.

(a) Pentru orice x real avem $f'(x) = \boxed{2x}$.

(b) Conform definiţiei derivatei într-un punct, limita este $f'(3) = \boxed{6}$.

(c) $\displaystyle\int_0^1 (x^2 + 7)\, dx = \left(\frac{x^3}{3} + 7x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} + 7 = \boxed{\frac{22}{3}}$.

(d) Aflăm punctul critic : $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \boxed{0}$. Deoarece f' schimbă semnul în acest punct, el va fi de extrem local.

(e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^7 f(0)}{f(3) - n^7} = \lim_{n\to\infty} \frac{7n^7}{-n^7 + 16} = \frac{7}{-1} = \boxed{-7}$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Fie $x, y \in \mathbb{R}$. Prin calcul direct $(x + 3)(y + 3) - 3 = xy + 3x + 3y + 9 - 3 = xy + 3x + 3y + 6 = x \circ y$.

(b) Observăm că $x \circ y = y \circ x, \forall x \in \mathbb{R}$. Condiţia $x \circ e = x, \forall x \in \mathbb{R}$ se scrie $xe + 3x + 3e + 6 = x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x(e + 2) + 3e + 6 = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e + 2 &= 0 \\ 3e + 6 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{e = -2}$$

(c) Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$. Avem

$$\begin{aligned}
(x \circ y) \circ z &= (xy + 3x + 3y + 6) \circ z \\
&= (xy + 3x + 3y + 6)z + 3(xy + 3x + 3y + 6) + 3z + 6 \\
&= xyz + 3xz + 3yz + 6z + 3xy + 9x + 9y + 18 + 3z + 6 \\
&= xyz + 3xy + 3yz + 3xz + 9x + 9y + 9z + 24 \\
x \circ (y \circ z) &= x \circ (yz + 3y + 3z + 6) \\
&= x(yz + 3y + 3z + 6) + 3x + 3(yz + 3y + 3z + 6) + 6 \\
&= xyz + 3xy + 3xz + 6x + 3x + 3yz + 9y + 9z + 18 + 6 \\
&= xyz + 3xy + 3yz + 3xz + 9x + 9y + 9z + 24
\end{aligned}$$

deci $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.

(d) Ecuaţia se scrie $3^x \cdot 3^x + 3 \cdot 3^x + 3 \cdot 3^x + 6 = 13 \Leftrightarrow (3^x)^2 + 6 \cdot 3^x - 7 = 0$. Notăm $3^x = t$ şi obţinem $t^2 - 6t - 7 = 0$. Discriminantul acestei ecuaţii de gradul doi este $\Delta = 36 + 28 = 64 = 8^2$ şi soluţiile sunt $t_1 = \frac{-6-8}{2} = -7$, $t_2 = \frac{-6+8}{2} = 1$. Deoarece $t = 3^x > 0$, reţinem doar soluţia $t = 1$, de unde obţinem $x = \boxed{0}$.

(e) Observăm că $x \circ (-3) = -3x + 3x - 9 + 6 = -3, \forall x \in \mathbb{R}$. Folosind comutativitatea avem şi $(-3) \circ x = -3, \forall x \in \mathbb{R}$. Atunci

$$x \circ (-3) \circ y = (-3) \circ y = -3, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

(f) De exemplu pentru $x = \sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$ avem $x \circ y = -2 + 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 6 = 4 \in \mathbb{Q}$.

(g) Conform punctului (e), -3 compus cu orice număr dă -3. Rezultatul este deci $\boxed{-3}$.

5. Subiectul IV

Rezolvare.

(a) Deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 1$, dreapta $\boxed{y = 1}$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul lui f.

(b) Pentru orice x real avem $f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2+2)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$. Atunci $f'(-x) = \frac{-2(-x)}{((-x)^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2} = -f'(x)$, deci $f'(x) + f'(-x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(c) Pentru $x > 0$ avem $f'(x) < 0$. Rezultă că f este strict descrescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.

(d) Fie $x \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\begin{aligned}
1 &\le f(x) \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x^2+1} \le \frac{x^2+2}{x^2+1} \Leftrightarrow 1 \le 2 \\
f(x) &\le 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+2}{x^2+1} \le 2 \Leftrightarrow x^2 + 2 \le 2x^2 + 2 \Leftrightarrow 0 \le x^2
\end{aligned}$$

Cum cele două inegalităţi sunt adevărate pentru orice x real, obţinem cerinţa problemei.

(e) De exemplu pentru $a = \sqrt{2}$ şi $b = -\sqrt{2}$ avem

$$f(a) = f(\sqrt{2}) = \frac{2+2}{2+1} = \frac{4}{3} \in \mathbb{Q}$$

$$f(b) = f(-\sqrt{2}) = \frac{2+2}{2+1} = \frac{4}{3} \in \mathbb{Q}$$

(f)

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 \frac{x^2+2}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{x^2+1}\right) dx \\ &= (x + \operatorname{arctg} x)\Big|_0^1 = \boxed{1 + \frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

(g) Înmulţind cu e^x, din punctul (d) rezultă că

$$e^x \le e^x f(x) \le 2e^x, \forall x \in \mathbb{R}$$

Integrând pe intervalul $[0, 1]$ şi folosind monotonia integralei, obţinem

$$\int_0^1 e^x\,dx \le \int_0^1 e^x f(x)\,dx \le 2\int_0^1 e^x\,dx$$

Împărţind cu $\int_0^1 e^x\,dx = e^x\Big|_0^1 = e - 1$ obţinem exact enunţul.

Pro Didactica vă urează succes la BAC.
De la toamnă vă așteptăm cu întrebări din materia de facultate.