BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 55

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 55

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) $|\sqrt{5}+i\sqrt{3}| = \sqrt{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{8} = \boxed{2\sqrt{2}}$

(b) Cu formula uzuală, distanţa este $\frac{|1+2+1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \boxed{2\sqrt{2}}$.

(c) Raza cercului este distanţa de la punctul E la dreaptă, adică $2\sqrt{2}$ conform punctului precedent. Atunci, ecuaţia cercului este $\boxed{(x-1)^2+(y-2)^2 = (2\sqrt{2})^2}$.

(d) Cum $\overrightarrow{LM}(3-1, 3-2) = \overrightarrow{MN}(5-3, 4-3)$, punctele sunt coliniare. Sau, un alt argument este că M este mijlocul segmentului LN.

(e) Pentru orice unghi x (în particular şi pentru $30°$) avem

$$\sin x + \sin(-x) = \sin x - \sin x = \boxed{0}$$

(f) Din $a+bi = (2+3i)(4+5i) = 8+10i+12i+15i^2 = -7+22i$, rezultă $a = \boxed{-7}$ şi $b = \boxed{22}$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) De exemplu putem lua $\boxed{a = 4 = 2^2, b = 8 = 2^3}$ şi avem $\sqrt{a}+\sqrt[3]{b} = 2+2 = 4 \in \mathbb{Z}$. Sau, altfel luăm $\boxed{a = b = 1}$ şi avem $\sqrt{a}+\sqrt[3]{b} = 2 \in \mathbb{Z}$.

(b) Un polinom cu coeficienţi întregi ce are $x_1 = 3+\sqrt{2}$ ca rădăcină, are şi conjugatul $x_2 = 3-\sqrt{2}$ ca rădăcină. Orice polinom de gradul doi cu rădăcinile x_1, x_2 este de forma $a(X^2 - SX + P)$, unde $S = x_1 + x_2 = 6$ şi $P = x_1x_2 = (3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2}) = 9-2 = 7$. Luând de exemplu $a = 1$, obţinem polinomul $\boxed{X^2 - 6X + 7}$.

(c) Fie $A = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$ şi $B = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$. Avem $\det A = \det B = 0$ şi rang $A = 2 \neq 1 =$ rang$B$.

(d) Inegalitatea se poate scrie $\log_2 x \leq 4 = \log_2 2^4 = \log_2 16$, sau $x \leq 16$. Orice număr real $x \in (3, 16]$ este convenabil. De exemplu, puteţi lua $x = \boxed{\pi}$.

(e) De exemplu, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\boxed{f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}}$, satisface $f(1) + f(2) = 1 + 2 = 3$.
Un alt exemplu este $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\boxed{f(x) = 3/2, x < 2007, \ f(x) = 0, x \geq 2007}$$

Intr-adevăr şi în acest caz $f(1) + f(2) = 3/2 + 3/2 = 3$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) Avem $A = \dfrac{5}{a_3} = \dfrac{5}{3^2+3+1} = \dfrac{5}{13}$ şi $B = \dfrac{3}{a_5} = \dfrac{3}{5^2+5+1} = \dfrac{3}{31}$. Atunci $\boxed{A > B}$.

(b) Ecuaţia $a_n = 21$ este echivalentă cu $n^2 + n - 20 = 0$. Această ecuaţie de gradul doi are rădăcinile $n_1 = 4$ şi $n_2 = -5$. Cum $n_2 \notin \mathbb{N}$, soluţia este $n_1 = \boxed{4}$.

(c) Numărul natural 1 nu este termen al şirului. Intr-adevăr ecuaţia $n^2 + n + 1 = 1$ are rădăcinile $n_1 = 0$ şi $n_2 = -1$. Cum niciunul din aceste numere nu este în $\mathbb{N}^*$, numărul $\boxed{1}$ nu este termen al şirului.

(d)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 + (n+1) + 1 - n^2 - n - 1}{n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+2}{n+1} = \lim_{n\to\infty} 2 = \boxed{2}\end{aligned}$$

(e) Cum $a_{n+1} - a_n = 2n + 2 > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (calculul a fost deja făcut la punctul precedent) şirul este strict crescător.

4. Subiectul III.

Rezolvare. Să observăm că $a \circ b$ este de fapt ultima cifră a lui ab.

(a) Conform observaţiei de mai sus, avem $4 \circ 6 = \boxed{4}$ şi $7 \circ 2007 = 7 \circ 7 = \boxed{9}$.

(b) De exemplu, $a = \boxed{11}$, $b = \boxed{13}$. Numai ultima cifră contează şi avem $a \circ b = 1 \circ 3 = 3$.

(c) Facem tabla operaţiei $\circ$ pe G şi observăm că $e = \boxed{6}$ satisface condiţia cerută.

$\circ$	2	4	6	8
2	4	8	2	6
4	8	6	4	2
6	2	4	6	8
8	6	2	8	4

(d) Se observă din tabla de la punctul precedent că $y = \boxed{2}$ satisface condiţia.

(e) Pe tabla de la punctul (c) se verifică uşor toate condiţiile unui grup comutativ.

(f) Trebuie să arătăm că nu există nici un număr întreg x astfel ca x^2 să se termine în cifra 2. In tabelul următor trecem ultima cifră a lui x^2 în funcţie de ultima cifră a lui x:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Se vede de aici că x^2 nu se termină niciodată în cifra 2.

(g) Afirmaţia din enunţ revine la faptul că $2^m \cdot 2^m = 2^{2m} = 4^m$ se termină în cifra 4 pentru cel puţin 2007 valori ale lui m. Trecem în tabelul următor ultima cifră a lui 4^m în funcţie de m:

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4^m	1	4	6	4	6	4	6	4	6	4

Observăm că 4^m se termină în cifra 4 pentru m impar. Demonstrăm acest fapt. Intr-adevăr, pentru $m = 2k+1$ avem $4^m - 4 = 4^{2k+1} - 4 = 4 \cdot (16^k - 1)$ divizibil prin $4 \cdot (16-1) = 60$, ceea ce arată că 4^{2k+1} se termină în cifra 4.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \boxed{4x^3 - 4}$.

(b) Determinăm punctele critice rezolvând ecuaţia $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4(x^3-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Cum în punctul $x = 1$ derivata f' îşi schimbă semnul, avem un punct de extrem local. Intr-adevăr, $f'(x) = 4(x^3-1) < 0$, pentru $x \in (-\infty, 1)$ şi $f'(x) = 4(x^3-1) > 0$, pentru $x \in (1, \infty)$, deci în $x = \boxed{1}$ funcţia are chiar un minim global.

(c) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $f(x) \geq 2x(x-2) \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x^2-1)^2 \geq 0$, qed.

(d) Deoarece $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, rezultă că f este convexă pe $\mathbb{R}$.

(e) $\displaystyle\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx = \int_1^e \left(x^3 - 4 + \frac{1}{x}\right)dx = \left(\frac{x^4}{4} - 4x + \ln x\right)\Bigg|_1^e = \boxed{\frac{e^4 - 16e + 19}{4}}$

(f) $\displaystyle\int_2^e \frac{x^3-1}{f(x)}\,dx = \int_2^e \frac{1}{4}\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \frac{1}{4}\ln f(x)\Big|_2^e = \boxed{\frac{1}{4}\ln\frac{e^4 - 4e + 1}{9}}$

(g) Conform (c), $f(x) \geq 2x(x-2) > 0$ pentru orice $x \in [e, e^2]$. De aici

$$\int_e^{e^2} \frac{x-2}{f(x)}\,dx \leq \int_e^{e^2} \frac{x-2}{2x(x-2)}\,dx = \int_e^{e^2} \frac{1}{2x}\,dx = \frac{1}{2}\ln x\Big|_e^{e^2} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$