BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 54

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 54

1. Subiectul I

Rezolvare.

(a) $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \boxed{1}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, deci în particular şi pentru $\alpha = 1$.

(b) Cu formula distanţei, $|DC| = \sqrt{(0-1)^2 + (1-2)^2} = \boxed{\sqrt{2}}$.

(c) Coordonatele eventualelor puncte de intersecţie satisfac simultan atât ecuaţia dreptei cât şi ecuaţia cercului. Obţinem sistemul:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (1-x)^2 = 25 \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 2x + 1 = 25 \\ y = 1 - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 12 = 0 \\ y = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{4, -3\} \\ y = 1 - x \end{cases}$$

Aşadar dreapta intersectează cercul în punctele de coordonate $\boxed{(4,-3)}$ şi $\boxed{(-3,4)}$.

(d) Observăm că vectorii $\overrightarrow{LM} = (1,1)$ şi $\overrightarrow{MN} = (1,1)$ sunt paraleli (chiar egali). Prin urmare punctele L, M şi N sunt colineare.

(e) Cu formula uzuală distanţa de la punctul $A(4,3)$ la dreapta de ecuaţie $x + y - 3 = 0$ este

$$\mathbf{d} = \frac{|1 \cdot 4 + 1 \cdot 3 - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \boxed{2\sqrt{2}}$$

(f) Avem succesiv

$$\begin{aligned} a + bi &= (\sqrt{3} + i)^4 = \left[(\sqrt{3} + i)^2\right]^2 = (3 - 1 + 2\sqrt{3}i)^2 \\ &= (2 + 2\sqrt{3}i)^2 = 4(1 + \sqrt{3}i)^2 = 4(1 - 3 + 2\sqrt{3}i) \\ &= -8 + 8\sqrt{3}i \end{aligned}$$

Deci $\boxed{a = -8}$ şi $\boxed{b = 8\sqrt{3}}$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Într-adevăr,

$$\begin{aligned} (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 &= x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2zx + x^2 \\ &= 2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \end{aligned}$$

(b) Folosind punctul precedent avem:

$$x^2+y^2+z^2=xy+yz+xz \quad\Leftrightarrow\quad x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$$
$$\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]=0$$

[o sumă de pătrate de numere reale este zero dacă şi numai dacă fiecare dintre ele este zero]

$$\Leftrightarrow\quad x-y=y-z=z-x=0$$
$$\Leftrightarrow\quad x=y=z$$

(c) Introducem notaţiile $a=2^x$, $b=3^x$, $c=5^x$. Ecuaţia devine

$$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca.$$

Conform punctului precedent rezultă $a=b=c$, adică $2^x=3^x=5^x$, de unde obţinem soluţia unică $\boxed{x=0}$.

(d) Ecuaţia este satisfăcută de către toate elementele lui $\mathbb{Z}_6$. Într-adevăr,

$$\hat{x}^3=\hat{x} \;\Leftrightarrow\; (\widehat{x-1})\cdot\hat{x}\cdot(\widehat{x+1})=\hat{0},$$

ceea ce este evident adevărat pentru orice $x\in\mathbb{Z}$, deoarece printre oricare trei numere consecutive există cel puţin un număr par şi exact un multiplu de 3. Probabilitatea cerută este $\boxed{p=1}$.

(e) Folosind relaţiile lui Viète obţinem

$$x_1+x_2+x+3+x_4=-\frac{1}{1}=\boxed{-1}$$

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) $\boxed{f'(x)=\sin x+x\cos x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

(b) Folosind teorema Leibnitz–Newton,

$$\int_0^1 f'(x)\,dx=f(1)-f(0)=\boxed{\sin 1}.$$

(c) Deoarece $[0,1]\subset[0,\frac{\pi}{2}]$ rezultă imediat că $f'(x)>0$, $\forall x\in(0,1]$. Prin urmare f este strict crescătoare pe intervalul $[0,1]$.

(d) Limita din enunţ este tocmai derivata funcţiei f în $x=0$, adică $\boxed{f'(0)=0}$.

(e) Cantitatea de sub limită este

$$\frac{f(x)}{x^2}=\frac{x\sin x}{x^2}=\frac{\sin x}{x}.$$

Limita este clasică şi este egală cu 1. Dacă, totuşi, nu recunoaştem acest fapt, observăm că limita este nedeterminată de tipul $\frac{0}{0}$. Folosind regula lui l'Hopital obţinem

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = \boxed{1}.$$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Avem

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix} \\ BA &= \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea+fc & eb+fd \\ ga+hc & gb+hd \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) Suma elementelor de pe diagonala principală a unei matrici pătratice M se numeşte **urma** lui m şi se notează cu $\mathrm{tr}\, M$. Avem

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{tr}\,(AB) = ae+bg+cf+dh \\ \mathrm{tr}\,(BA) = ea+fc+gb+hd \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA).$$

(c)

$$A+B = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}, \quad A-B = \begin{pmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{pmatrix}.$$

(d) Într-adevăr,

$$\begin{aligned} \det(A+B)+\det(A-B) &= (a+e)(d+h)-(c+g)(b+f)+ \\ &\quad +(a-e)(d-h)-(c-g)(b-f) \\ &= 2(ad+eh-cb-gf) \\ &= 2(ad-cb+ah-gf) \\ &= 2(\det A+\det B), \end{aligned}$$

q.e.d.

(e) Această teoremă este în manual.

(f) Rezultă direct din punctul precedent.

(g) Rezultă direct din (f), alegând $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) $\boxed{f(1) = 7}$.

(b) Formula este cunoscută. Aţi întâlnit-o de exemplu la calculul sumelor de progresii geometrice. Avem

$$(x-1)(1+x+x^2+\ldots+x^6) = x+x^2+\ldots+x^6+x^7-1-x-x^2-\ldots-x^6 = x^7-1$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

(c) Fie $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$. Atunci $f(x) = \dfrac{x^7 - 1}{x - 1} \neq 0$. Aplicând teorema lui Lagrange funcţiei $x \mapsto x^7$ obţinem $f(x) = 7c^6 \geq 0$. Inegalitatea este strictă. Cazul rămas se tratează direct: $f(1) = 7 > 0$. Propoziţia este demonstrată. Un argument alternativ este observaţia faptului că $x^7 - 1$ şi $x - 1$ au acelaşi semn, indiferent de valoarea lui $x \neq 1$.

(d) Faptul că $F' = f$ rezultă direct din teorema Leibnitz–Newton.

(e) Studiem semnul derivatei lui F. Am văzut la punctele precedente că $F'(x) = f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Deci F este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

(f) Din definiţia funcţiei F avem

$$F(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^7}{7}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ecuaţia din enunţ se mai scrie şi $F(x) = F(1)$. Deoarece F este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ (punctul precedent) rezultă că F este injectivă. Obţinem soluţia unică $\boxed{x = 1}$.

(g) Fie $x \geq 0$. Deoarece pe intervalul $[0, \infty)$ funcţia f este sumă de funcţii crescătoare (puterile naturale ale lui x) rezultă că f este crescătoare pe $\mathbb{R}$. Atunci

$$f(t) \leq f(x), \quad \forall 0 \leq t \leq x.$$

Integrând această inegalitate în raport cu varibila t pe intervalul $[0, x]$ rezultă

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt \leq \int_0^x f(x)\, dt = x f(x)\,,$$

q.e.d.

Pro Didactica vă urează succes la BAC.
De la toamnă vă aşteptăm cu întrebări din materia de facultate.