BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 52

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 52

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Distanţa dintre punctele A şi B se calculează după formula

$$\begin{aligned} d(A,B) &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \\ &= \sqrt{(3-5)^2 + (4-6)^2} = \sqrt{4+4} = \boxed{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(b) Deoarece $\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$, avem $\cos^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{4} = \boxed{1}$.

(c) Aria unui triunghi echilateral de latură l este $S = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$. În cazul nostru obţinem $\boxed{S = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}}$.

(d) Pentru $z = 2 - 5i$ avem $\boxed{\bar{z} = 2 + 5i}$.

(e) Coordonatele celor două puncte verifică ecuaţia dreptei, deci

$$\begin{cases} 3 + 4a + b &= 0 \\ 5 + 6a + b &= 0 \end{cases}$$

Scăzând cele două ecuaţii obţinem

$$-2 - 2a = 0 \Leftrightarrow a = -1$$

Înlocuind în prima ecuaţie vom avea

$$3 - 4 + b = 0 \Leftrightarrow b = 1$$

Deci $\boxed{a = -1, b = 1}$.

(f) Triunghiul ABC este dreptunghic în A, deci putem aplica teorema lui Pitagora: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{1+4} = \boxed{\sqrt{5}}$.

2. Subiectul II.1

Rezolvare.

(a) Notăm $f(a) = c$ şi $f(b) = d$. Ţinând cont de faptul că $c \neq d$ şi $c, d \in \{1,2,3\}$, perechile (c,d) pot fi $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,1)$, $(2,3)$, $(3,1)$, $(3,2)$. Obţinem astfel că numărul funcţiilor cerute este $\boxed{6}$.

(b) Verificăm fiecare valoare posibilă a lui n în parte:

- $1^2 \geq 1! \Leftrightarrow 1 \geq 1$, relaţie adevărată;

- $2^2 \geq 2! \Leftrightarrow 4 \geq 2$, relaţie adevărată;
- $3^2 \geq 3! \Leftrightarrow 9 \geq 6$, relaţie adevărată;
- $4^2 \geq 4! \Leftrightarrow 16 \geq 24$, relaţie falsă;
- $5^2 \geq 5! \Leftrightarrow 25 \geq 120$, relaţie falsă.

Deci 3 dintre cele 5 valori posibile ale lui n verifică relaţia. Probabilitatea cerută va fi $\boxed{\dfrac{3}{5}}$.

(c) Ecuaţia se scrie, echivalent,

$$4^x = 32 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^5 \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow \boxed{x = \tfrac{5}{2}}$$

(d) Avem de-a face cu 10 termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice cu primul termen 5, iar al zecelea termen 95. Suma lor va fi atunci

$$\frac{5 + 95}{2} \cdot 10 = \boxed{500}$$

(e) Prin calcul direct $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(-1) = \boxed{0}$.

3. Subiectul II.2

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x > 0$ avem $f'(x) = \dfrac{(x + x^2)'}{x + x^2} = \boxed{\dfrac{1 + 2x}{x + x^2}}$.

(b) Limita cerută este $f'(1) = \boxed{\dfrac{3}{2}}$.

(c) Pentru $x > 0$ avem $f'(x) > 0$, deci f este strict crescătoare pe $(0, \infty)$.

(d) Ţinând cont de faptul că o primitivă pentru f' este chiar f şi aplicând formula Leibniz-Newton, obţinem

$$\int_1^2 f'(x)\,dx = f(x)\Big|_1^2 = f(2) - f(1) = \ln 6 - \ln 2 = \ln \frac{6}{2} = \boxed{\ln 3}$$

(e) Prin înlocuirea lui $f'(x)$ obţinem

$$\lim_{x \to \infty} 4x f'(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{8x^2 + 4x}{x^2 + x} = \boxed{8}$$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Adunăm elementele de pe diagonala principală

$$\mathrm{tr}\,(A) = 3 + 2 = \boxed{5}$$

(b) Ridicol de evident.

Comentariu. Ar fi bine totuşi să nu scrieţi aşa ceva pe foaia de examen, ci ceva de genul :

Fie $A = B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Atunci $\mathrm{tr}\,(A) = a + d = \mathrm{tr}\,(B)$.

(c) De exemplu $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(d) Fie $U, V \in M_2(\mathbb{R})$, $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$. Atunci

$$U^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

$$V^2 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 + fg & ef + fh \\ ge + hg & fg + h^2 \end{pmatrix}$$

Deoarece $tr(U) = tr(V)$ şi $tr(U^2) = tr(V^2)$ obţinem relaţiile

$$a + d = e + h$$

şi

$$a^2 + bc + bc + d^2 = e^2 + fg + fg + h^2$$

Ridicând prima relaţie la pătrat, avem

$$a^2 + d^2 + 2ad = e^2 + h^2 + 2eh$$

Scăzând acum relaţia a doua, obţinem

$$ad - bc = eh - fg$$

adică

$$det(U) = det(V)$$

(e) Prin calcul direct. Fie $D = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} p & r \\ s & t \end{pmatrix}$. Atunci $aD + bE = \begin{pmatrix} ax + bp & ay + br \\ az + bs & aw + bt \end{pmatrix}$ şi de aici

$$\begin{aligned} tr(aD + bE) &= ax + bp + aw + bt = a(x + w) + b(p + t) \\ &= a \cdot tr(D) + b \cdot tr(E) \end{aligned}$$

(f) Iar calcul direct. Fie $F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$. Atunci

$$\begin{aligned} FG &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} \\ GF &= \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + fc & be + df \\ ag + ch & bg + dh \end{pmatrix} \\ tr(FG) &= ae + bg + cf + dh \\ tr(GF) &= ae + fc + bg + dh \end{aligned}$$

Se observă că $tr(FG) = tr(GF)$.

(g) Fie $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ două matrice astfel încât $tr(LX) = tr(NX), \forall X \in M_2(\mathbb{R})$. Deoarece relaţia are loc pentru orice matrice X, putem da diferite valori elementelor lui X. Pentru $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avem

$$LX = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

$$NX = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ g & 0 \end{pmatrix}$$

Atunci $tr(LX) = a, tr(NX) = e \Rightarrow \boxed{a = e}$. Pentru $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avem

$$LX = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

$$NX = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e \\ 0 & g \end{pmatrix}$$

Atunci $tr(LX) = c, tr(NX) = g \Rightarrow \boxed{c = g}$. Pentru $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ avem

$$LX = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}$$

$$NX = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 0 \\ h & 0 \end{pmatrix}$$

Atunci $tr(LX) = b, tr(NX) = f \Rightarrow \boxed{b = f}$. Pentru $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avem

$$LX = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$NX = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & f \\ 0 & h \end{pmatrix}$$

Atunci $tr(LX) = d, tr(NX) = h \Rightarrow \boxed{d = h}$. Obţinem astfel că matricele L şi N au aceleaşi elemente, deci sunt egale.

5. Subiectul IV

Rezolvare.

(a) Să observăm că funcţia f poate fi prelungită cu aceaşi expresie la o funcţie derivabilă pe domeniul de definiţie $(-1, \infty)$. Pentru orice $x > -1$ avem

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x+1)-x}{(x+1)^2} + \frac{(x+2)-(x+1)}{(x+2)^2} + \frac{(x+5)-(x+4)}{(x+5)^2} \\ &= \boxed{\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+5)^2}} \end{aligned}$$

Comentariu. Suntem nevoiţi să ”mărim” domeniul de definiţie al funcţiei f, ca să nu avem de calculat o derivată la dreapta în $x = 0$.

(b) Deoarece $f'(x) > 0, \forall x \in [0, \infty)$, f este strict crescătoare pe $[0, \infty)$.

(c) Deoarece f este strict crescătoare, avem

$$f(0) \leq f(x) < \lim_{y\to\infty} f(y), \ \forall x \geq 0$$

Cum $f(0) = \frac{1}{2} + \frac{4}{5} = \frac{13}{10}$ şi $\lim_{y\to\infty} f(x) = 1 + 1 + 1 = 3$, obţinem inegalităţile din enunţ.

(d) Pentru fiecare fracţie în parte, vom forma la numărător expresia de la numitor (facem de fapt împărţirea polinoamelor)

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 \left(\frac{x+1-1}{x+1} + \frac{x+2-1}{x+2} + \frac{x+5-1}{x+5}\right) dx \\ &= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1} + 1 - \frac{1}{x+2} + 1 - \frac{1}{x+5}\right) dx \\ &= (x - \ln|x+1| + x - \ln|x+2| + x - \ln|x+5|)\Big|_0^1 \\ &= 3 - \ln 2 - \ln 3 - \ln 6 + \ln 2 + \ln 5 = \boxed{3 - \ln\frac{5}{18}} \end{aligned}$$

(e) Deoarece $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$, dreapta $\boxed{y = 3}$ este asimptotă orizontală spre ∞ la graficul lui f.

(f) Procedând ca la punctul (d) avem

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t)\,dt &= [3t - \ln(t+1) - \ln(t+2) - \ln(t+5)]\Big|_0^x \\ &= 3x - \ln(x+1) - \ln(x+2) - \ln(x+5) + \ln 2 + \ln 5 \end{aligned}$$

Atunci

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)\,dt &= \lim_{x\to\infty} x \cdot \left(3 - \frac{\ln(x+1)}{x} - \frac{\ln(x+2)}{x} - \frac{\ln(x+5)}{x} + \frac{\ln 10}{x}\right) \\ &= \infty \cdot (3 - 0 - 0 - 0 + 0) = \infty \cdot 3 = \boxed{\infty} \end{aligned}$$

▼[detalii]

Am folosit faptul că pentru orice $k > 0$ fixat, aplicând regula lui l'Hopital avem

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+k)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+k} = 0$$

(g) Observăm că $f(1) = 2$. Deoarece f este strict crescătoare, ea este şi injectivă, deci $x = \boxed{1}$ este unica soluţie a ecuaţiei.

Pro Didactica vă urează succes la BAC.
De la toamnă vă aşteptăm cu întrebări din materia de facultate.