BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 4

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 4

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Vectorul $\overrightarrow{AB}$ are coordonatele $(-1-3, 1-3)$ adică

$$\boxed{(-4,-2)}$$

(b) Lungimea vectorului $\overrightarrow{AC}$ este $\sqrt{(3-2)^2+(3-5)^2}$ adică

$$\boxed{\sqrt{5}}$$

(c) Coordonatele mijlocului segmentului $[BC]$ sunt

$$\left(\frac{x_B+x_C}{2}, \frac{y_B+y_C}{2}\right)$$

adică

$$\boxed{\left(\tfrac{1}{2}, 3\right)}$$

(d) Determinăm cosinusul unghiului şi apoi folosim teorema fundamentală a trigonometriei, ţinând seama de faptul că toate unghiurile unui triunghi sunt cuprinse între 0 şi π radiani (deci au sinusul pozitiv).

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{ABC}) &= \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|} = \frac{(4,2)\cdot(-3,-4)}{\sqrt{16+4}\cdot\sqrt{9+16}} = \frac{-12-8}{\sqrt{20}\cdot 5} = -\frac{\sqrt{20}}{5}\\ \sin(\widehat{ABC}) &= \sqrt{1-\cos^2(\widehat{ABC})} = \sqrt{1-\frac{20}{25}} = \boxed{\frac{\sqrt{5}}{5}}\end{aligned}$$

(e) Punctul A aparţine parabolei: $3^3 = 3\cdot 3$. Prin dedublare, ecuaţia tangentei va fi atunci

$$y\cdot y_A = 3\cdot\frac{x+x_A}{2}$$

adică $3y = 3\dfrac{x+3}{2}$, deci

$$\boxed{y = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{2}}$$

(f) Conform punctului (c) coordonatele centrului sunt $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$, iar raza este $\frac{|BC|}{2} = \frac{\sqrt{3^2+4^2}}{2} = \frac{5}{2}$. Ecuaţia cercului va fi atunci

$$\boxed{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + (y-3)^2 = \frac{25}{4}}$$

2. Subiectul II.1

Rezolvare.

(a) Deoarece $\sqrt{10}, \sqrt{15} \in (3,4)$, numerele întregi cerute vor fi $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$, în număr de

$$\boxed{7}$$

(b)

$$2^{2n-1} = 32 \Leftrightarrow 2^{2n-1} = 2^5 \Leftrightarrow 2n-1 = 5 \Leftrightarrow \boxed{n=3}$$

(c) Folosind proprietăţile logaritmilor ecuaţia se rescrie în formele echivalente

$$\log_2 a = \log_4 9 \Leftrightarrow \log_2 a = \frac{\log_2 9}{\log_2 4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 a = \frac{2\log_2 3}{2} \Leftrightarrow \log_2 a = \log_2 3$$

Obţinem

$$\boxed{a=3}$$

(d) Condiţia ca numerele date să fie în progresie aritmetică se scrie

$$2(2x-3) = (x+1)+(x+5) \Leftrightarrow 4x-6 = 2x+6 \Leftrightarrow 2x = 12 \Leftrightarrow \boxed{x=6}$$

(e) De exemplu

$$\boxed{f(x) = (x-2)(x+2)}$$

sau

$$\boxed{f(x) = 0, \forall x \neq 0,\ f(0) = 1}$$

3. Subiectul II.2

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2xe^x + (1+x^2)e^x = \boxed{(x+1)^2 e^x}$

(b) $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1$. Dar $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, deci f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ (nefiind constantă pe niciun interval). rezultă că mulţimea punctelor de extrem este $\boxed{\emptyset}$.

(c) Calculăm $f''(x) = 2(x+1)e^x + (x+1)^2 e^x = (x+1)(x+3)e^x$. Rezolvăm ecuaţia $f''(x) = 0 \Rightarrow x = -1, x = -3$. Cum f'' schimbă semnul în aceste puncte, va rezulta că punctele de inflexiune sunt $\boxed{\{-3,-1\}}$.

(d) Folosind în final de două ori regula lui l'Hopital pentru nedeterminări $\frac{\infty}{\infty}$, avem

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^2+1)e^x = \lim_{x\to\infty}((-x)^2+1)e^{-x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$$

Deci asimptota orizontală la graficul funcţiei către $-\infty$ este $\boxed{y=0}$.

(e)

$$\int_0^1 e^{-x} f(x)\,dx = \int_0^1 (x^2+1)\,dx = \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}+1 = \boxed{\tfrac{4}{3}}$$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) $(A-I_2)(B-I_2)+I_2 = AB - AI_2 - I_2B + I_2^2 + I_2 = AB - A - B + 2I_2 = A * B$.

(b) $A * 2I_2 = A\cdot 2I_2 - A - 2I_2 + 2I_2 = 2A - A = A, \forall A \in M_2(\mathbb{R})$.
$2I_2 * A = 2I_2 \cdot A - 2I_2 - A + 2I_2 = 2A - A = A, \forall A \in M_2(\mathbb{R})$.
Deci $2I_2$ este element neutru pe $M_2(\mathbb{R})$ pentru legea $*$.

(c) Fie $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$. Va trebui să arătăm că $A*(B*C) = (A*B)*C$. Avem :

$$A*(B*C) = (A-I_2)[B*C-I_2]+I_2 =$$

$$(A-I_2)[(B-I_2)(C-I_2)+I_2-I_2]+I_2 = (A-I_2)(B-I_2)(C-I_2)+I_2$$

$$(A*B)*C = [A*B-I_2](C-I_2)+I_2 =$$

$$[(A-I_2)(B-I_2)+I_2-I_2](C-I_2)+I_2 = (A-I_2)(B-I_2)(C-I_2)+I_2$$

Deci $A*(B*C) = (A*B)*C$ şi legea este astfel asociativă.

(d) Vom demonstra că dacă $A, B \in H$ atunci $A*B \in H$. Fie $A, B \in H$. Rezultă că $A - I_2, B - I_2$ sunt inversabile, deci $\det(A-I_2) \neq 0$ şi $\det(B-I_2) \neq 0$. Vrem să arătăm că $A*B \in H$, adică $A*B-I_2$ este inversabilă, adică $\det(A*B-I_2) \neq 0$. Dar

$$\det(A*B-I_2) = \det((A-I_2)(B-I_2)+I_2-I_2) =$$

$$= \det((A - I_2)(B - I_2)) = \det(A - I_2)\det(B - I_2) \neq 0$$

deoarece ambii determinanţi sunt nenuli.

(e) Vom verifica dacă $(H, *)$ îndeplineşte condiţiile pentru a fi grup.
1. H este parte stabilă a lui $M_2(\mathbb{R})$ în raport cu legea $*$ conform punctului (d).
2. Legea $*$ este asociativă conform punctului (c).
3. Legea $*$ admite elementul neutru $2I_2$ pe $M_2(\mathbb{R})$ conform punctului (b). Trebuie să demonstrăm că $2I_2 \in H$. Acest lucru este echivalent cu faptul că $2I_2 - I_2$ este inversabilă, adică I_2 este inversabilă, evident.
4. Vom demonstra că pentru orice $A \in H$ există $A' \in H$ astfel încât $A * A' = A' * A = 2I_2$.

$$A * A' = 2I_2 \Leftrightarrow (A - I_2)(A' - I_2) + I_2 = 2I_2 \Leftrightarrow (A - I_2)(A' - I_2) = I_2$$

Dar $A - I_2$ este inversabilă, deci există $(A - I_2)^{-1}$. Vom avea atunci $A' - I_2 = (A - I_2)^{-1}$, de unde $A' = (A - I_2)^{-1} + I_2$. Un calcul simplu arată c u $A' * A = 2I_2$. Deoarece $\det(A' - I_2) = \det((A - I_2)^{-1}) \neq 0$, va rezulta că $A' \in H$.

(f) Pentru orice $X, Y \in H$, avem

$$f(X * Y) = X * Y - I_2 = (X - I_2)(Y - I_2) + I_2 - I_2 =$$

$$= (X - I_2)(Y - I_2) = f(X)f(Y)$$

(g) Fie $G = \{A \in M_2(\mathbb{R}) / \det(A) \neq 0\}$ şi $g : H \to G$, $g(X) = X - I_2$.
Demonstrăm mai întâi că g este bine definită : fie $X \in H$; rezultă $X - I_2$ inversabilă, deci $g(X) \in G$.
Demonstrăm acum că g este bijectivă. Vom arăta că pentru orice $Y \in G$ există şi este unică matricea $X \in H$ astfel încât $g(X) = Y$. Fie $Y \in G$. Din relaţia $g(X) = Y$ obţinem $X - I_2 = Y$, deci $X = I_2 + Y$. Deoarece $X - I_2 = Y$ şi Y este inversabilă , rezultă $X - I_2$ inversabilă, deci $X \in H$.
Condiţia $g(X * Y) = g(X)g(Y)$ a fost verificată la punctul anterior, g având aceeaşi expresie ca f.

5. Subiectul IV

Rezolvare. Pentru a nu fi nevoiţi să calculăm derivate laterale, presupunem că propunătorul a definit funcţiile pe domeniul lor maxim de definicţie, adică $\mathbb{R}$.

(a) $x \in [0, 1] \Rightarrow \operatorname{arctg} x \in [0, \frac{\pi}{4}] \Rightarrow x \cdot \operatorname{arctg} x \in [0, \frac{\pi}{4}] \subset [0, 1]$
$x \in [0, 1] \Rightarrow \ln(1 + x^2) \in [0, \ln 2] \subset [0, 1]$

(b) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem

$$f'(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1 + x^2}$$

$$g'(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$$

(c) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem

$$f''(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2+1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2}$$

$$g''(x) = \frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

Atunci

$$(f-g)''(x) = f''(x) - g''(x) = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \geq 0, \forall x \in [0,1]$$

Deci $f-g$ este convexă pe $[0,1]$.

(d) Fie $h : [0,1] \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - g(x)$. Avem $h''(x) \geq 0, \forall x \in [0,1] \Rightarrow h'$ crescătoare pe $[0,1] \Rightarrow h'(x) \geq h'(0) = 0, \forall x \in [0,1] \Rightarrow h$ crescătoare pe $[0,1] \Rightarrow h(x) \geq h(0) = 0, \forall x \in [0,1] \Rightarrow f(x) \geq g(x), \forall x \in [0,1]$. Am folosit faptul că $h(0) = f(0) - g(0) = 0$ şi $h'(0) = f'(0) - g'(0) = 0$.

(e) Deoarece $f(x) \geq g(x), \forall x \in [0,1]$ şi $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0, \forall x \in [0,1]$ va rezulta

$$\sqrt{f(x)} \geq \sqrt{g(x)}, \forall x \in [0,1]$$

(f)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}\right)' \operatorname{arctg} x\,dx \\
&= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}(x - \operatorname{arctg} x)\Big|_0^1 \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi-2}{4}
\end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 g(x)\,dx &= \int_0^1 x' \ln(x^2+1)\,dx \\
&= x\cdot\ln(x^2+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 x\cdot\frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln 2 - 2\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1} \\
&= \ln 2 - 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \ln 2 + \frac{\pi-4}{2}
\end{aligned}$$