BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 47

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 47

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) $|AB| = \sqrt{(0-6)^2+(4-0)^2} = \sqrt{36+16} = \boxed{2\sqrt{13}}$

(b) Ecuaţia dreptei AB este $\frac{y-0}{4-0} = \frac{x-6}{0-6} \Leftrightarrow \frac{y}{2} = \frac{x-6}{-3} \Leftrightarrow \boxed{2x+3y-12=0}$

(c) Coordonatele mijlocului segmentului AB sunt $\left(\frac{0+6}{2}, \frac{4+0}{2}\right) = \boxed{(3,2)}$.

(d) Distanţa dintre A şi O este 4, deci raza cercului este $\frac{4}{2} = 2$. Centrul cercului este mijlocul segmentului AO, adică punctul de coordonate $(0,2)$. Ecuaţia cercului de diametru AO este $\boxed{(x-0)^2+(y-2)^2=2^2}$.

(e) Triunghiul ABO este dreptunghic cu unghiul drept în O. Lungimea razei cercului circumscris este atunci jumătate din lungimea ipotenuzei AB, adică $\boxed{\sqrt{13}}$.

(f) În triunghiul dreptunghic AOB, avem $\operatorname{tg}\widehat{OAB} = \frac{OB}{OA} = \frac{6}{4} = \boxed{\frac{3}{2}}$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) $\lg x + \lg 2 = \lg 6 \Leftrightarrow \lg x = \lg 6 - \lg 2 \Leftrightarrow \lg x = \lg\frac{6}{2} \Leftrightarrow \lg x = \lg 3$. Folosind injectivitatea funcţiei logaritmice, rezultă $x = \boxed{3} > 0$.

(b) Deoarece $A_n^2 = \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{(n-2)!\cdot(n-1)\cdot n}{(n-2)!} = n(n-1)$, ecuaţia din enunţ se scrie sub forma echivalentă $n^2-n-42=0$. Rădăcinile acestei ecuaţii de gradul doi sunt $n_1=7$ şi $n_2=-6$. Cum $n_2 \notin \mathbb{N}$, singura soluţie este $n = \boxed{7}$.

(c) Raţia progresiei aritmetice este $a_4 - a_3 = 5 - 11 = \boxed{-6}$.

(d) Singurele elemente inversabile faţă de înmulţire în $\mathbb{Z}$ sunt 1 şi -1.Cum 2 din cele 6 elemente ale mulţimii satisfac condiţia, probabilitatea este $\frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$.

(e) $(f\circ f)(1) = f(f(1)) = f(2\cdot1+1) = f(3) = 2\cdot3+1 = \boxed{7}$

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty - \infty = \boxed{-\infty}$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{2x^3} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-3x^2}{2x^3} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2x}\right) = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

(c) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $f'(x) = \boxed{3x^2 - 6x}$.

(d) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $f''(x) = 6x - 6$. Ecuaţia $f''(x) = 0$ are singura rădăcină $x = 1$. Cum $f''(x)$ îşi schimbă semnul în $x = 1$, rezultă că $(1, f(1)) = \boxed{(1, -2)}$ este punct de inflexiune al graficului lui f.

(e) Avem $\displaystyle\int f(x)\,dx = \int (x^3 - 3x^2)\,dx = \boxed{\frac{x^4}{4} - x^3 + C}$ pe $\mathbb{R}$.

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x, y \in \mathbb{C}$, avem $(x-i)(y-i)+i = xy-i(x+i)+i^2+i = xy-i(x+y)-1+i = x * y$.

(b) Fie $x, y, z \in \mathbb{C}$. Folosind punctul precedent, avem

$$\begin{aligned}
(x*y)*z &= [x*y-i](z-i)+i = [(x-i)(y-i)+i-i](z-i)+i \\
&= (x-i)(y-i)(z-i)+i \\
x*(y*z) &= (x-i)[y*z-i]+i = (x-i)[(y-i)(z-i)+i-i]+i \\
&= (x-i)(y-i)(z-i)+i
\end{aligned}$$

Deci, $(x*y)*z = x*(y*z)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{C}$.

(c) Conform (a), avem $x*(1+i) = (x-i)(1+i-i)+i = (x-i)\cdot 1+i = x$, pentru orice $x \in \mathbb{C}$. Similar se arată că $(1+i)*x = x$, deci $1+i$ este într-adevăr elementul neutru al legii de compoziţie $*$.

(d) Fie $x \neq i$ şi $y \neq i$. Atunci $x - i \neq 0$ şi $y - i \neq 0$, de unde $(x-i)(y-i) \neq 0$, sau $x*y = (x-i)(y-i)+i \neq i$. Prin urmare, $\mathbb{C}\setminus\{i\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ pentru legea $*$.

(e) Verificăm că $(\mathbb{C}\setminus\{i\}, *)$ satisface axiomele grupului. Conform (d), legea $*$ este **bine definită** pe $\mathbb{C}\setminus\{i\}$. Conform (b), legea $*$ este **asociativă**, iar de la punctul (c) ştim că $1+i \in \mathbb{C}\setminus\{i\}$ este **element neutru**. Pentru orice $x \in \mathbb{C}\setminus\{i\}$, ecuaţia $x*y = 1+i \Leftrightarrow (x-i)(y-i)+i = 1+i \Leftrightarrow (x-i)(y-i) = 1$ are soluţia $y = i + \dfrac{1}{x-i} \in \mathbb{C}\setminus\{i\}$. Cum avem şi $y*x = 1+i$, orice element din $\mathbb{C}\setminus\{i\}$ este **simetrizabil** în raport cu legea $*$. În concluzie, $(\mathbb{C}\setminus\{i\}, *)$ este grup.

(f) Pentru orice $x \in \mathbb{C}$ avem $i*x = (i-i)(x-i)+i = i$, deci în particular pentru $x = i^2*i^3*i^4$, avem $i*i^2*i^3*i^4 = \boxed{i}$.

(g) **Comentariu.** Foarte confuz acest enunţ. Bănuim că vor ceva de genul identităţii ce urmează. Folosind repetat punctul (a), vom avea

$$x_1 * x_2 * \ldots * x_{2007} = (x_1 - i)(x_2 - i)\ldots(x_{2007} - i) + i$$

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) $f(0) = e^0 \sin 0 + e^{-0} \cos 0 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$

(b) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^x)' \cdot \sin x + e^x \cdot (\sin x)' + (e^{-x})' \cdot \cos x + e^{-x} \cdot (\cos x)' \\ &= e^x \sin x + e^x \cos x - e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x \\ &= (e^x - e^{-x})(\sin x + \cos x) \end{aligned}$$

(c) Ecuaţia tangentei la graficul lui f în punctul de abcisă $x = 0$ este

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

Cum $f(0) = 1$ şi $f'(0) = (e^0 - e^{-0})(\sin 0 + \cos 0) = (1 - 1) \cdot 1 = 0$, ecuaţia tangentei căutate este $\boxed{y - 1 = 0}$.

(d) Continuăm calculul de la punctul (b) şi avem

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^x - e^{-x})(\sin x + \cos x) \\ &= e^{-x}(e^{2x} - 1)\left(\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) \\ &= e^{-x}(e^{2x} - 1) 2 \sin\frac{\pi}{4} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{2} e^{-x}(e^{2x} - 1)\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Să observăm că pentru $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$, avem $x - \frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ şi în consecinţă $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$. Atunci, pentru $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ semnul lui $f'(x)$ este acelaşi cu semnul lui $e^{2x} - 1$. Prin urmare,

$$f'(x) \begin{cases} < 0, & x \in \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right) \\ > 0, & x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

şi de aici rezultă că f este strict descrescătoare pe $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$ şi strict crescătoare pe $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$.

(e) Conform punctului precedent, $x = 0$ este punct de minim local pentru f.

(f) Continuând ideea de la punctul precedent, observăm că de la punctul (d) rezultă $f(x) \geq f(0) = 1$, $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$. Integrând această inegalitate pe

$\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ şi folosind monotonia integralei, obţinem

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)\, dx \geq \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} 1\, dx = \pi\,.$$

(g) Cum $f(2k\pi) = e^{2k\pi}\sin 2k\pi + e^{-2k\pi}\cos 2k\pi = e^{2k\pi}\cdot 0 + e^{-2k\pi}\cdot 1 = e^{-2k\pi}$, rezultă că

$$\begin{aligned} a_n &= f(2\pi) + f(4\pi) + \ldots + f(2n\pi) = e^{-2\pi} + e^{-4\pi} + \ldots + e^{-2n\pi} \\ &= e^{-2\pi}\cdot\frac{1-e^{-2n\pi}}{1-e^{-2\pi}} \end{aligned}$$

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{e^{-2\pi}}{1-e^{-2\pi}} = \boxed{\dfrac{1}{e^{2\pi}-1}}$.

PRO DIDACTICA VĂ UREAZĂ SUCCES LA BAC.
DE LA TOAMNĂ VĂ AŞTEPTĂM CU ÎNTREBĂRI DIN MATERIA DE FACULTATE.