BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 45

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 45

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) $\arcsin 1 = \boxed{\dfrac{\pi}{2}}$

(b) Coordonatele punctelor de intersecţie dintre cerc şi dreaptă sunt soluţiile sistemului

$$\begin{cases} x^2 + y^2 & = & 8 \\ y & = & 2 \end{cases}$$

Substituind $y = 2$ în prima ecuaţie, găsim $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$. Deci cercul şi dreapta din enunţ se intersectează în $\boxed{\text{două}}$ puncte, anume $(2, 2)$ şi $(-2, 2)$.

(c) Partea reală a numărului complex $z = (2-i)(2+i) = 2^2 - i^2 = 5$ este $\boxed{5}$.

(d) $\sin \pi + \sin(-\pi) = 0 + 0 = \boxed{0}$

(e) Condiţia pentru ca dreptele date să fie paralele este $\dfrac{1}{2} = \dfrac{a}{4} \Leftrightarrow a = \boxed{2}$.

(f) Egalitatea se scrie $2+3i+i(a+bi) = 4i \Leftrightarrow 2+3i+ai-b = 4i \Leftrightarrow (2-b)+(3+a)i = 4i$. Rezultă $\begin{cases} 2-b & = & 0 \Rightarrow b = \boxed{2} \\ 3+a & = & 4 \Rightarrow a = \boxed{1} \end{cases}$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) $(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(3) = 3 \cdot 3 - 2 = \boxed{7}$

(b) $\dfrac{5! - 3!}{4!} = \dfrac{120 - 6}{24} = \dfrac{114}{24} = \boxed{\dfrac{19}{4}}$

(c) Discriminantul ecuaţiei este $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4 = (2i)^2$, iar rădăcinile sunt $x_1 = \dfrac{-2+2i}{2} = \boxed{-1+i}$, $x_2 = \dfrac{-2-2i}{2} = \boxed{-1-i}$.

(d) Restul împărţirii polinomului f la $X+2 = X-(-2)$ este $f(-2) = (-2)^3 - 5(-2)^2 + 4 = -8 - 20 + 4 = \boxed{-24}$.

(e) Deoarece $3^1 < 3^2 = 9 < 25 < 27 = 3^3 < 3^4 < 3^5$, condiţia este satisfăcută de 2 din cele 5 elemente ale mulţimii. Probabilitatea este $\boxed{\dfrac{2}{5}}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem

$$f'(x) = \frac{x'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \boxed{\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}}$$

(b) Substituind $y = x^2 + 1$ obţinem $dy = 2x\,dx$, sau $x\,dx = \frac{1}{2}dy$. Atunci

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{1}{y}\cdot\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\ln|y|\Big|_1^2 = \boxed{\frac{1}{2}\ln 2}.$$

(c) Conform definiţiei derivatei unei funcţii într-un punct, limita este $f'(0) = \boxed{1}$.

(d) Pentru orice $x \in (-1, 1)$, avem $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} > 0$. Rezultă că f este strict crescătoare pe $[-1, 1]$.

(e) $\lim\limits_{x\to-\infty} xf(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \boxed{1}$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) $I_2 \in M$ căci elementele matricei sunt din mulţimea $\{0, 1, 2\}$, iar pe prima linie şi prima coloană se află $1 \neq 0$. De asemenea $O_2 \notin M$ deoarece elementul de pe prima linie si prima coloană este 0.

(b) Putem lua de exemplu $A = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$ şi $B = \boxed{I_2}$.

(c) Cum $\det A = 2\cdot1-0\cdot0 = 2 \neq 0$, matricea A este inversabilă şi $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}A^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Deoarece $\dfrac{1}{2} \notin \{0, 1, 2\}$, matricea A^{-1} nu este în M.

(d) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M$. Atunci

$$-4 = a\cdot 0 - 2\cdot 2 \leq ab - cd = \det X \leq 2\cdot 2 - 0\cdot 0 = 4$$

(e) Matricele din M pot avea pe prima linie şi prima coloană 2 valori posibile, anume 1 şi 2. Pe fiecare din celelalte poziţii pot avea oricare din cele 3 elemente ale mulţimii $\{0, 1, 2\}$. Deci în M există $2\cdot3\cdot3\cdot3 = \boxed{54}$ matrice.

(f) Fie P produsul tuturor matricelor din M. Printre matricele din M există cel puţin una cu determinantul 0 (conform punctului (b)). Atunci $\det P = 0$, deci rangul lui P nu poate fi 2. Pe de altă parte pe prima linie şi prima coloană a lui P nu poate fi 0, căci fiecare din factori are doar elemente pozitive şi un element nenul pe prima linie prima coloană. Rezultă că rangul lui P este 1.

(g) Vom prezenta explicit câte o matrice care are determinantul egal cu fiecare din valorile din mulţimea dată. Avem

$$\begin{aligned}
Y_0 &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \in M \Rightarrow \det Y_0 = 0\\
Y_1 &= I_2 \in M \Rightarrow \det Y_1 = 1\\
Y_2 &= \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \in M \Rightarrow \det Y_2 = 2\\
Y_3 &= \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} \in M \Rightarrow \det Y_3 = 3\\
Y_4 &= \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} \in M \Rightarrow \det Y_4 = 4\\
Y_{-1} &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \in M \Rightarrow \det Y_{-1} = -1\\
Y_{-2} &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix} \in M \Rightarrow \det Y_{-2} = -2\\
Y_{-3} &= \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix} \in M \Rightarrow \det Y_{-3} = -3\\
Y_{-4} &= \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix} \in M \Rightarrow \det Y_{-4} = -4
\end{aligned}$$

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $f'(x) = \boxed{-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}}$.

(b) $f(-x) = \dfrac{1}{(-x)^2+1} = \dfrac{1}{x^2+1} = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

(c) Fie $x \in \mathbb{R}$ arbitrar. Deoarece $x^2+1 \geq 1 > 0$, rezultă $f(x) > 0$. Pe de altă parte, $x^2+1 \geq 1 \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{x^2+1} \leq \dfrac{1}{1} = 1$

(d) Continuăm calculul de la punctul (a):

$$f''(x) = -\frac{2(x^2+1)^2 - 2x \cdot 2 \cdot 2x(x^2+1)}{(x^2+1)^4} = \frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$

Notăm că $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \boxed{\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$ şi cum f'' îşi schimbă semnul în aceste puncte, rezultă că sunt într-adevăr puncte de inflexiune.

(e) Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2+1} = 0$, graficul lui f are asimptotă orizontală de ecuaţie $\boxed{y = 0}$ către $+\infty$.

(f) $\lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x f(t)\,dt = \lim\limits_{x\to\infty} (\operatorname{arctg} t)\Big|_0^x = \lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \boxed{\frac{\pi}{2}}$

(g) Indicaţia ne este dată de punctul precedent. Luăm $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{10^{-2008}}{\pi} f(x)\,.$$

Atunci

$$\lim_{x\to\infty} \int_{-x}^x g(t)\,dt = \frac{10^{-2008}}{\pi} \lim_{x\to\infty} (\operatorname{arctg} x)\Big|_{-x}^x = 10^{-2008} < 10^{-2007}$$

PRO DIDACTICA VĂ UREAZĂ SUCCES LA BAC.
DE LA TOAMNĂ VĂ AŞTEPTĂM CU ÎNTREBĂRI DIN MATERIA DE FACULTATE.