BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 42

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 42

1. Subiectul I

Rezolvare.

(a) Fiind paralelă cu d, panta dreptei căutate este egală cu $m = 3$. Ecuaţia dreptei este

$$y - 3 = 3(x+1) \Leftrightarrow \boxed{y = 3x + 6}$$

(b) Ecuaţia carteziană a dreptei d se scrie $3x - y + 2 = 0$. Cu formula uzuală distanţa de la punctul $A(-1,3)$ la dreapta d este

$$\mathbf{d}(A,d) = \frac{|3\cdot(-1) - 3 + 2|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \boxed{\tfrac{4}{\sqrt{10}}}.$$

(c) Simetricul punctului $A(-1,3)$ faţă de axa Oy este punctul $\boxed{A'(1,3)}$.

(d) Ecuaţia cercului se rescrie $(x+1)^2 + y^2 = 1$, deci centrul său este situat în punctul $\boxed{(-1,0)}$.

(e) Inlocuind $z = a + i$, egalitatea $|z| = |z+1|$ devine $\sqrt{a^2+1} = \sqrt{(a-1)^2+1}$, sau $a^2 = (a-1)^2$, adică $\boxed{a = \frac{1}{2}}$.

(f) $\operatorname{re}(1+2i)^2 = \operatorname{re}(1 - 4 + 4i) = \boxed{-3}$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) $\log_2 4 + \log_2 \frac{1}{4} = 2 + (-2) = \boxed{0}$.

(b) Mulţimea $\{1,2,3,4\}$ are $C_4^2 = 6$ submulţimi cu două elemente. Dintre acestea doar două au suma elementelor un număr par: $\{1,3\}$ şi $\{2,4\}$. Probabilitatea cerută este aşadar $p = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$.

(c) Folosind relaţiile lui Viète obţinem

$$s_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{-2}{1} = 2, \quad s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{3}{1} = 3.$$

Rezultă $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = s_1^2 - 2s_2 = \boxed{-2}$.

(d) $2^{2^x} = 16 \Leftrightarrow 2^{2^x} = 2^4 \Leftrightarrow 2^x = 4 \Leftrightarrow \boxed{x = 2}$.

(e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = \boxed{-2}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) $\boxed{f'(x) = 2e^{2x}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) Studiem semnul derivatei a doua a funţiei f. Deoarece $f''(x) = 2 \cdot 2e^{2x} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ rezultă că f este convexă pe $\mathbb{R}$.

(c) Avem succesiv

$$2e^{2x} + xe^{2x} = 0 \Leftrightarrow (2+x)e^{2x} = 0 \Leftrightarrow 2 + x = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = -2}$$

(d) Avem $f(x)f'(x) = 2e^{4x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\int_0^{\frac{1}{2}} 2e^{4x}\, dx = \frac{2}{4} e^{4x} \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{1}{2}(e^2 - 1)}.$$

Ca fapt divers, dacă u este o funcţie derivabilă atunci $2u \cdot u'$ este tocmai derivata funcţiei u^2, prin urmare astfel de integrale sunt întotdeauna uşor de calculat.

(e) Folosind una din proprietăţile de bază ale funcţiei exponenţiale ştim că $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = \boxed{0}$.

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Pentru $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ avem $\operatorname{tr} A = 1 + 4 = \boxed{5}$.

(b) $\operatorname{tr}(\cdot)$ este o funcţie.

(c) De exemplu, luând $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avem $\operatorname{tr} P = \operatorname{tr} Q = 1$, cu toate că $P \neq Q$.

(d) Avem

$$UV = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ r & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{tr}(UV) = p$$

$$UW = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p \\ 0 & r \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{tr}(UW) = r$$

(e) Fie $D = \begin{pmatrix} x & \star \\ \star & y \end{pmatrix}$ şi $E = \begin{pmatrix} z & \star \\ \star & t \end{pmatrix}$ unde prin $\star$ am notat elementele ce nu vor avea nici o influenţă în demonstraţie. Atunci $a \cdot \operatorname{tr} D + a \cdot \operatorname{tr} E = a(x+y) + b(z+t) =$

$ax + ay + bz + bt$. Pe de altă parte avem şi

$$aD + bE = \begin{pmatrix} ax + bz & \star \\ \star & ay + bt \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{tr}(aD + bE) = ax + bz + ay + bt$$

(f) Fie $E = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ şi $F = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$. Atunci

$$\left.\begin{array}{l} EF = \begin{pmatrix} aa' + bc' & \star \\ \star & cb' + dd' \end{pmatrix} \\ FE = \begin{pmatrix} a'a + b'c & \star \\ \star & c'b + d'd \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{tr}(EF) = aa' + bc' + cb' + dd' = \operatorname{tr}(FE)$$

Observaţie. utilizând punctul (e) această propoziţie poate fi abordată prin verificare directă pentru fiecare dintre cele patru matrici "unitate" (care au toate elementele egale cu zero cu excepţia unuia singur egal cu unu).

(g) Notând $U = L - N$ şi folosind (e), ipoteza este echivalentă cu $\operatorname{tr}(UX) = 0$, $\forall X \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$. Fie $U = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$. Luăm $X = U^* = \begin{pmatrix} \overline{p} & \overline{r} \\ \overline{q} & \overline{s} \end{pmatrix}$. Din ipoteză $\operatorname{tr}(U \cdot U^*) = 0$. Pe de altă parte observăm că $\operatorname{tr}(U \cdot U^*) = |p|^2 + |q|^2 + |r|^2 + |s|^2$. Acest lucru e posibil dacă şi numai dacă $p = q = r = s = 0$, sau $U = O_2$, adică $L = N$, q.e.d.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Avem

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln(x+1) - \ln x + \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right) \\ &= \boxed{\ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x}\right)}, \quad \forall x \in (0, \infty). \end{aligned}$$

(b) Într-adevăr,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{1}{2x^2(x+1)^2}\left[-2x(x+1) + x^2 + (x+1)^2\right] \\ &= \frac{1}{2x^2(x+1)^2}, \quad \forall x \in (0, \infty). \end{aligned}$$

(c) Funcţia f' este strict crescătoare pe $(0, \infty)$ dacă derivata ei este strict pozitivă pe $(0, \infty)$. Într-adevăr $(f')'(x) = f''(x) > 0$, $\forall x \in (0, \infty)$ din formula de la (b).

(d) Avem

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x}\right)\right] = \ln(1+0) - 0 = \boxed{0}.$$

(e) Folosind teorema Leibnitz–Newton obţinem

$$\int_1^e f'(x)\,dx = f(e) - f(1) = \boxed{\left(e + \frac{1}{2}\right)[\ln(e+1) - 1] - \frac{3}{2}\ln 2}.$$

(f) O funcţie convexă pe $(0, \infty)$ ce are ca asimptotă orizontală spre ∞ chiar axa Ox este **automat pozitivă şi descrescătoare**.
Prezentăm totuşi şi un argument mai constructiv. Deoarece ştim de la punctul (c) că f' este crescătoare rezultă

$$f'(x) < \lim_{u\to\infty} f'(u) = 0, \quad \forall x \in (0, \infty)$$

Prin urmare f este descrescătoare pe $(0, \infty)$

(g) Observăm faptul că

$$e^{f(x)} = \left(e^{\ln\frac{x+1}{x}}\right)^{x+\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}, \quad \forall x \in (0, \infty).$$

Deoarece am arătat la punctul precedent că f este strict descrescătoare pe $(0, \infty)$ rezultă că $e^{f(n)} > e^{f(n+1)}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, inegalitate echivalentă cu ceea ce trebuia demonstrat.