BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 41

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 41

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Conform formulei fundamentale a trigonometriei, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. In particular,

$$\sin^2 \frac{\pi}{2007} + \cos^2 \frac{\pi}{2007} = \boxed{1}$$

(b) Deoarece $\cos 90^\circ = 0$ este unul din factori, produsul este $\boxed{0}$.

(c) Coordonatele punctului A trebui să satisfacă ecuaţia dreptei, deci

$$3(-m) - 4m + 14 = 0 \iff -7m = -14 \iff m = \boxed{2}.$$

(d) Folosind formula uzuală găsim că distanţa cerută este

$$\frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 3 + 14|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \boxed{\frac{8}{5}}.$$

(e) $|1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \boxed{2}$

(f) Lungimea laturii triunghiului echilateral este distanţa de la A la B, adică

$$|AB| = \sqrt{(4-8)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{16+9} = 5.$$

Atunci aria triunghiului echilateral este

$$\frac{5^2\sqrt{3}}{4} = \boxed{\frac{25\sqrt{3}}{4}}.$$

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) $\log_2 x = -1 \iff x = 2^{-1} = \boxed{\frac{1}{2}} \in (0, \infty)$

(b) Fie r raţia progresiei geometrice. Atunci $r^2 = \frac{a_3}{a_1} = 4 \Rightarrow r = \sqrt{4} = 2$ şi prin urmare $a_7 = a_1 \cdot r^6 = 1 \cdot 2^6 = \boxed{64}$.

(c) Restul împăţirii polinomului f la $X+1 = X-(-1)$ este $f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 = \boxed{0}$.

(d) De exemplu pentru $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \boxed{x^2}$ avem $f(3) = 9 = f(-3)$.

(e) Mulţimea tuturor numerelor naturale dintre 1 şi 100 conţine pătratele perfecte $1^2 = 1, 2^2 = 4, 3^2 = 9, \ldots, 10^2 = 100$. Probabilitatea acestui eveniment este deci $\frac{10}{100} = \boxed{\frac{1}{10}}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) Fie $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Avem

$$x - 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)+1}{x+1} = \frac{x^2-1+1}{x+1} = \frac{x^2}{x+1} = f(x)\,.$$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = \boxed{1}$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\frac{x^2}{x+1} - x\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2 - x(x+1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-x}{x+1} = \boxed{-1}$

(d) Asimptota oblică către ∞ la graficul funcţiei f este de forma $y = mx + n$, unde conform punctelor (b) şi (c) $m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ şi $n = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - m] = -1$. Deci ecuaţia ei este $\boxed{y = x - 1}$.

(e) Folosind punctul (a), avem

$$\int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{x+1}\right) dx = \int_0^1 (x-1)\, dx = \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_0^1 = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

4. Subiectul III.

Rezolvare. **Comentariu.** Prin Ax propunătorul subiectului notează înmulţirea dintre matricea A şi numărul real ("scalarul") x, înmulţire pe care aţi notat-o de obicei xA.

(a) $\det A = \boxed{ad - bc}$

(b) $f(0) = \det(A \cdot 0 + B) = \det(B) = eh - fg$

(c) $Ax + B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+e & bx+f \\ cx+g & dx+h \end{pmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix} = \boxed{ad - bc + eh - fg}$

(e) Folosind punctul (c) şi apoi (d), avem

$$\begin{aligned} f(x) &= \det(Ax+B) = \begin{vmatrix} ax+e & bx+f \\ cx+g & dx+h \end{vmatrix} \\ &= (ax+e)(dx+h)-(bx+f)(cx+g) \\ &= (ad-bc)x^2+(ah+de-bg-cf)x+eh-fg \\ &= \det(A)\cdot x^2+mx+\det(B) \end{aligned}$$

(f) Conform punctului (e), avem $\det(A+B) = f(1) = \det(A)+m+\det(B)$ şi $\det(A-B) = \det[(-1)(-A+B)] = (-1)^2\det(-A+B) = f(-1) = \det(A)-m+\det(B)$. Adunând aceste două relaţii, deducem $\det(A+B)+\det(A-B) = 2(\det A+\det B)$, de unde $\det A+\det B = \boxed{2}$.

(g) Considerăm funcţia de gradul cel mult doi $g(x) = f(x)-2$. Folosind calculele de la rezolvarea punctului precedent şi conform ipotezei, avem $g(1) = f(1)-2 = \det(A+B)-2 = 0$. De asemenea, $g(-1) = \det(A-B)-2 = 0$ şi $g(0) = \det B-2 = 0$. Dar o funcţie polinomială de gradul cel mult doi are mai mult de 2 rădăcini dacă şi numai dacă este identic nulă. In concluzie,

$$g(k) = f(k)-2 = 0, \quad \forall k \in \mathbb{R},$$

q.e.d.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) $f(0) = 1^r-1 = \boxed{0}$

(b) Pentru orice $x > -1$, avem $f'(x) = \boxed{r(1+x)^{r-1}-r}$.

(c) Cum $r > 1$, pentru $x > -1$ avem $f'(x) = 0 \Leftrightarrow r[(1+x)^{r-1}-1] = 0 \Leftrightarrow (1+x)^{r-1} = 1 \Leftrightarrow 1+x = 1 \Leftrightarrow x = \boxed{0}$.

(d) Cum $r > 1$, funcţia $f'(x) = r[(1+x)^{r-1}-1]$ este strict crescătoare pe $[-1,\infty)$. Deoarece $f'(0) = 0$, rezultă că pentru $x \in [-1,0)$, avem $f'(x) < 0$, deci f este strict descrescătoare pe $[-1,0]$, iar pentru $x \in (0,\infty)$ avem $f'(x) > 0$, deci f este strict crescătoare pe $[0,\infty)$.

(e) Conform punctului precedent, funcţia f are un punct de minim global în $x = 0$, deci $f(x) \geq f(0) = 0$, $\forall x > -1$, ceea ce revine exact la inegalitatea din enunţ.

(f) Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem

$$\begin{aligned} \frac{e_{n+1}}{e_n} &= \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{(n+2)\cdot(n+2)^n\cdot n^n}{(n+1)\cdot(n+1)^n\cdot(n+1)^n} \\ &= \frac{n+2}{n+1}\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n = \frac{n+2}{n+1}\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^n \end{aligned}$$

(g) În inegalitatea de la punctul (e), luăm $x = -\dfrac{1}{(n+1)^2} > -1$ şi $r = n \geq 1$ (inegalitatea devine identitate pentru $r = 1$). Avem atunci

$$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \geq 1 - \frac{n}{(n+1)^2} > 1 - \frac{n}{n^2+2n} = 1 - \frac{1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Cu această inegalitate, şi folosind punctul (f), obţinem $\dfrac{e_{n+1}}{e_n} > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$, deci şirul $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict crescător.

Observaţie. Rezultatul clasic conţinut în ultimul subpunct se demonstrează în mod industrial folosind funcţia $u : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definită prin $u(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$. Să-i studiem variaţia. Pentru orice $x > 0$ avem

$$\begin{aligned} u'(x) &= \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2} = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \\ u''(x) &= \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)^2} < 0. \end{aligned}$$

Din cele de mai sus u este concavă pe $(0,\infty)$, deci u' este strict descrescătoare, prin urmare pentru orice $x > 0$ avem

$$u'(x) > \lim_{x\to\infty} u'(x) = \ln 1 - 0 = 0.$$

Aşadar funcţia u este strict crescătoare pe $(0,\infty)$.

PRO DIDACTICA VĂ UREAZĂ SUCCES LA BAC.
DE LA TOAMNĂ VĂ AŞTEPTĂM CU ÎNTREBĂRI DIN MATERIA DE FACULTATE.