BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 39

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 39

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) $d(A,B) = \sqrt{(2-5)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{9+16} = \boxed{5}$

(b) Condiţia revine la $\frac{a^2}{4} + \frac{0^2}{9} = 1 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = \pm 2$. Cum ni s-au cerut doar valori pozitive pentru a, singura soluţie este $a = \boxed{2}$.

(c) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \boxed{\sqrt{3}+1}$

(d) Cercul înscris într-un pătrat are diametrul egal cu latura pătratului. Deci raza cercului este $\frac{2}{2} = 1$ şi atunci aria sa este $\pi \cdot 1^2 = \boxed{\pi}$.

(e) Distanţa de la punctul $C(1,1)$ la dreapta $x+y-1=0$ este $\frac{|1+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

(f) Punând condiţia ca $1+i$ să satisfacă ecuaţia obţinem

$(1+i)^2 - 2(1+i) + a = 0 \Leftrightarrow (1+2i+i^2) - 2 - 2i + a = 0 \Leftrightarrow -2+a = 0 \Leftrightarrow a = \boxed{2}$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Condiţia de existenţă este $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ pentru ca C_n^2 să aibă sens. Cu formula combinărilor, ecuaţia devine

$$\frac{n!}{2!(n-2)!} = 10 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 10 \Leftrightarrow n^2 - n - 20 = 0 \Leftrightarrow n \in \{-4, 5\}.$$

Cum doar $n = \boxed{5}$, satisface condiţia de existenţă, aceasta este unica soluţie.

(b) Raţia progresiei aritmetice este $r = a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2$. Atunci

$$a_{10} = a_1 + (10-1)r = 1 + 9 \cdot 2 = \boxed{19}.$$

(c) Ecuaţia se scrie $z^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow (z^2-1)(z^2+1) = 0 \Leftrightarrow z \in \{-1, 1, -i, i\}$. Cum 2 din cele 4 rădăcini sunt reale, probabilitatea este $\frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$.

(d) Fie $a = g(5)$. Cum g este inversa lui f, avem

$$f(a) = f(g(5)) = 5 \iff 2a + 3 = 5 \iff a = \boxed{1}.$$

(e) Restul împărţirii lui f la $X - \sqrt{2}$ este $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^4 - 2(\sqrt{2})^2 + 5 = 4 - 2 \cdot 2 + 5 = \boxed{5}$

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) $f(1) = 1 \cdot \ln 1 = \boxed{0}$

(b) Pentru orice $x > 0$, avem $f'(x) = \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} = \boxed{1 + \ln x}$.

(c) Ecuaţia $f'(x) = 0 \iff \ln x = -1$ are singura soluţie $x = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$. Cum în acest punct derivata f' are schimbare de semn, rezultă că $x = \boxed{\dfrac{1}{e}}$ este singurul punct de extrem al lui f.

(d) Deoarece f este o primitivă lui f', avem

$$\int_1^e f'(x)\,dx = f(e) - f(1) = e \ln e - 1 \ln 1 = \boxed{e}$$

(e) Folosind regula lui l'Hopital pentru o nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$, avem

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x \ln x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \boxed{0}$$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Fie $x, y \in (-1, 1)$. Atunci $xy > -1$, de unde $1 + xy > 0$. Putem atunci multiplica cu numitorul şi inegalităţile devin $-1 - xy < x + y < 1 + xy$. Inegalitatea din stânga se scrie $0 < 1 + xy + x + y = (1 + x)(1 + y)$, ceea ce este clar pentru $x, y > -1$. Inegalitatea din dreapta se poate scrie $0 < 1 + xy - x - y = (1 - x)(1 - y)$ şi este o consecinţă imediată a faptului că $x, y < 1$.

(b) Pentru orice $x \in G$, avem

$$\begin{aligned}\frac{(1+x)(1+y) - (1-x)(1-y)}{(1+x)(1+y) + (1-x)(1-y)} &= \frac{(1+x+y+xy) - (1-x-y+xy)}{(1+x+y+xy) + (1-x-y+xy)} \\ &= \frac{x+y}{1+xy} = x \circ y\end{aligned}$$

(c) Fie $x, y, z \in G$. Atunci

$$\begin{aligned}
(x \circ y) \circ z &= \frac{x \circ y + z}{1 + (x \circ y)z} = \frac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + \frac{x+y}{1+xy}z} = \frac{x + y + z(1 + xy)}{1 + xy + (x + y)z} \\
&= \frac{x + y + z + xyz}{1 + xy + xz + yz} \\
x \circ (y \circ z) &= \frac{x + y \circ z}{1 + x(y \circ z)} = \frac{x + \frac{y+z}{1+yz}}{1 + x\frac{y+z}{1+yz}} = \frac{x(1 + yz) + y + z}{1 + yz + x(y + z)} \\
&= \frac{x + y + z + xyz}{1 + xy + xz + yz},
\end{aligned}$$

deci $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.

(d) Observăm că legea de compoziţie $\circ$ este comutativă. Este suficient să găsim $e \in G$ satisfăcând $x \circ e = x \;\Leftrightarrow\; \dfrac{x + e}{1 + xe} = x \;\Leftrightarrow\; x + e = x + x^2 e \;\Leftrightarrow\; e(x^2 - 1) = 0$. Pentru ca această relaţie să fie satisfăcută pentru orice $x \in G$, este necesar şi suficient ca $e = \boxed{0}$.

(e) Pentru orice $x \in G$ observăm că luând $y = \boxed{-x}$ avem $x \circ y = y \circ x = 0$.

(f) Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, \in G$. Notăm $P(n):$

$$x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n = \frac{(1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_n) - (1 - x_1)(1 - x_2)\ldots(1 - x_n)}{(1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_n) + (1 - x_1)(1 - x_2)\ldots(1 - x_n)}$$

Demonstrăm că $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Verificarea pentru $n = 2$ a fost făcută la punctul (b). Presupunem că $P(n)$ este adevărată. Atunci datorită asociativităţii demonstrate la punctul (c), avem

$$\begin{aligned}
&x_1 \circ x_2 \circ \ldots x_n \circ x_{n+1} = (x_1 \circ x_2 \circ \ldots x_n) \circ x_{n+1} = \\
&= \frac{(1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_n) - (1 - x_1)(1 - x_2)\ldots(1 - x_n)}{(1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_n) + (1 - x_1)(1 - x_2)\ldots(1 - x_n)} \circ x_{n+1} \\
&= \frac{\dfrac{(1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_n) - (1 - x_1)(1 - x_2)\ldots(1 - x_n)}{(1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_n) + (1 - x_1)(1 - x_2)\ldots(1 - x_n)} + x_{n+1}}{1 + \dfrac{(1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_n) - (1 - x_1)(1 - x_2)\ldots(1 - x_n)}{(1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_n) + (1 - x_1)(1 - x_2)\ldots(1 - x_n)}x_{n+1}} \\
&= \frac{(1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_n)(1 + x_{n+1}) - (1 - x_1)(1 - x_2)\ldots(1 - x_n)(1 - x_{n+1})}{(1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_n)(1 + x_{n+1}) + (1 - x_1)(1 - x_2)\ldots(1 - x_n)(1 - x_{n+1})}
\end{aligned}$$

deci $P(n + 1)$ este adevărtă. Conform principiului induţiei $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

(g) Simplificăm întâi separat

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{n}\right) &= \frac{3}{2}\frac{4}{3}\frac{5}{4}\ldots\frac{n + 1}{n} = \frac{n + 1}{2} \\
\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{3}{4}\ldots\frac{n - 1}{n} = \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Atunci folosind punctul (f), avem

$$\frac{1}{2} \circ \frac{1}{3} \circ \ldots \circ \frac{1}{n} = \frac{\frac{n+1}{2} - \frac{1}{n}}{\frac{n+1}{2} + \frac{1}{n}} = \frac{n^2+n-2}{n^2+n+2}$$

Observaţie. Poate unii dintre voi se întreabă (pe bună dreptate) de unde a fost găsită problema. Răspunsul este foarte simplu. Funcţia *tangentă hiperbolică* , definită prin $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ este bijectivă de la $\mathbb{R}$ la intervalul $(-1, 1)$. Inversa ei (*arctangenta hiperbolică*) se calculează uşor:

$$\tanh^{-1}(y) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}, \quad \forall y \in (-1, 1)\,.$$

În plus,

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}, \quad \forall x, y, \in \mathbb{R}\,.$$

Aşadar $\tanh(x+y) = \tanh x \circ \tanh y$, deci această funcţie este *morfism* de la $(\mathbb{R}, +)$ la $((-1, 1), \circ)$. **Toate cerinţele problemei sunt consecinţe directe al acestui fapt.** Toate problemele de acest tip se pot trata în mod sistematic prin identificarea unei structuri algebrice şi al unui morfism adecvat.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $f'(x) = \boxed{\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}$

(b) Pentru $x > 0$, avem $f'(x) = \frac{x\left[\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+2}\right]}{\sqrt{(x^2+2)(x^2+1)}} < 0$, căci toţi factorii sunt pozitivi cu excepţia parantezei de la numărător care este negativă. Rezultă că f este strict descrescătoare pe $[0, \infty)$.

(c) Amplificând cu conjugatul, avem

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+2)-(x^2+1)}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x\left[\sqrt{1+\frac{2}{x^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right]} = \boxed{0} \end{aligned}$$

(d) Deoarece funcţia este pară, adică $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, folosind punctul (c) avem $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Atunci graficul lui f are asimptota orizontală $\boxed{y = 0}$ atât către ∞ cât şi către $-\infty$.

(e) Deoarece $f(\sqrt{1})+f(\sqrt{2})+\ldots+f(\sqrt{n}) = \sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1} = \sqrt{n+2}-\sqrt{2}$, limita este

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}-\sqrt{\frac{2}{n}}\right) = \boxed{1}$$

(f) Fie $g_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_b(x) = \sqrt{x^2+b}$. Atunci funcţia $G_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G_b(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+b}+\frac{b}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+b})$ este o primitivă a lui g_b. Într-adevăr $G_b'(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+b}+x\frac{x}{\sqrt{x^2+b}}\right)+\frac{b}{2}\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+b}}}{x+\sqrt{x^2+b}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+b}+\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+b}}+\frac{1}{2}\frac{b}{\sqrt{x^2+b}} = \sqrt{x^2+b}$. Atunci

$$\begin{aligned}\int_0^x \sqrt{t^2+a^2}\,dt &= \int_0^x g_{a^2}(t)\,dt = G_{a^2}(t)\Big|_0^x = G_{a^2}(x)-G_{a^2}(0)\\ &= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})-\frac{a^2}{2}\ln a\end{aligned}$$

(g) Cum funcţia f este continuă şi pozitivă, aria cerută este dată de $\int_0^1 f(x)\,dx$. Folosind punctul precedent, avem

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx-\int_0^1\sqrt{x^2+1}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{1^2+2}+\frac{2}{2}\ln(1+\sqrt{1^2+2})-\frac{2}{2}\ln\sqrt{2}\\ &\quad -\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{1^2+1}-\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{1^2+1})+\frac{1}{2}\ln 1\\ &= \boxed{\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}+\ln(1+\sqrt{3})-\frac{1}{2}\ln(2+2\sqrt{2})}\end{aligned}$$

PRO DIDACTICA VĂ UREAZĂ SUCCES LA BAC.
DE LA TOAMNĂ VĂ AŞTEPTĂM CU ÎNTREBĂRI DIN MATERIA DE FACULTATE.