BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 38

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 38

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) $\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$.

(b) Partea reală a numărului comple $(1-2i)(1+2i) = 1 - 2^2 i^2 = 1 + 4 = 5$ este $\boxed{5}$.

(c) Cum unghiul $\widehat{BAC}$ este obtuz, nu poate fi egal cu un alt unghi al triunghiului. Rezultă că $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{\pi - \frac{5\pi}{6}}{2} = \boxed{\frac{\pi}{12}}$.

(d) Folosind teorema cosinus avem

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{4^2 + 5^2 - 6^2}{2 \cdot 4 \cdot 5} = \boxed{\frac{1}{8}}.$$

(e) Coordonatele punctelor de intersecţie dintre dreaptă şi cerc sunt date de soluţiile sistemului $\begin{cases} x^2 + y^2 & = & 8 \\ y & = & x \end{cases}$. Substituind $y = x$ în prima ecuaţie obţinem $2x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$. Punctele de intersecţie au deci coordonatele $(2,2)$ şi $(-2,-2)$ şi avem $\boxed{2}$ puncte de intersecţie.

(f) Avem $|(1+2i)^2| = |1+2i|^2 = (\sqrt{1^2+2^2})^2 = \boxed{5}$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Din moment ce ordinea alegerii nu are vreo importanţă, avem $C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = \boxed{10}$ moduri de a alege problemele.

(b) Mulţimea X este de forma $\{7\} \cup A$, unde A este o submulţime a mulţimii $\{3,5\}$. Deci A este una din mulţimile

$$\boxed{\{7\}, \{3,7\}, \{5,7\}, \{3,5,7\}}$$

(c) Inecuaţia se scrie sub formele echivalente $\frac{-1}{3-x} < 0 \Leftrightarrow 3 - x > 0 \Leftrightarrow x < 3$. Din cele 5 elemente ale mulţimii, 2 satisfac această condiţie (anume 1 şi 2), deci probabilitatea este $\boxed{\frac{2}{5}}$.

(d) Folosind injectivitatea funcţiei exponenţţiale de bază diferită de 1, avem $3^{-2x-1} = 3^{x^2} \Leftrightarrow -2x - 1 = x^2 \Leftrightarrow 0 = (x+1)^2 \Leftrightarrow x = \boxed{-1}$

(e) De exemplu, pentru $f = \boxed{X^3 - 1}$ avem $f(1) = 1^3 - 1 = 0$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) Deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, graficul lui f admite către $-\infty$ asimptota orizontală $\boxed{y = 0}$.

(b) Pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, avem $f'(x) = \boxed{-\frac{1}{(x-1)^2}}$.

(c) Deoarece $\sqrt{5} > 2 > 1$, avem $\sqrt{5} - 1 > 2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}-1} < \frac{1}{2-1}$. Deci $\boxed{a > b}$. În general, deoarece funcţia f este strict descrescătoare pe intervalul $(1, \infty)$, dacă $1 < x < y$ atunci $f(x) > f(y)$.

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} nf(n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n-1} = \boxed{1}$.

(e) $\int_2^3 f(x)\,dx = \ln|x-1|\Big|_2^3 = \ln|3-1| - \ln|2-1| = \boxed{\ln 2}$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Cum A este matrice triangular superioară (cu toate elementele de sub diagonală nule), determinantul este produsul elementelor de pe diagonală, adică $\det A = \boxed{0}$. Rangul lui A este atunci mai mic decât 3. Dar A are minorul $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ de determinant $1 \cdot 3 - 2 \cdot 0 = 3 \neq 0$. Rangul lui A este deci $\boxed{2}$.

(b) Avem iar o matrice triangular superioară, deci $\det B = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$. Cum $\det B \neq 0$, matricea B este inversabilă. Nu ni se cere, dar vom avea nevoie la punctul (d) de inversa lui B. Avem $B^{-1} = \frac{1}{\det B} B^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Prin calcul direct (vă puteţi verifica rezultatul cu punctul (e))

$$B^2 = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}, \quad B^3 = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

(d) Cum matricea B este inversabilă, înmulţind la stânga cu B^{-1}, avem $BX = A \Leftrightarrow X = B^{-1}A$. Folosind forma lui B^{-1} determinată la rezolvarea punctului (b), avem

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

(e) Pentru $n = 1$ se verifică direct. Pentru $n = 2$ şi $n = 3$ folosim punctul (c).

Fie acum $n > 3$. Profităm de faptul că în enunţ apare cuvântul “eventual” ca să nu folosim inducţia. Fie $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Atunci $B = I_3 + D$ (D a fost definit tocmai pentru a avea această egalitate). Prin calcul direct se observă că

$$D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; D^3 = O_3 \,, \; D^k = O_3, \forall k \geq 3$$

Cum $D^k = O_3$, pentru $k \geq 3$, conform binomului lui Newton avem

$$\begin{aligned} B^n &= (I_3 + D)^n = I_3 + C_n^1 D + C_n^2 D^2 = I_3 + nD + \frac{n(n-1)}{2} D^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n & 2n \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+3)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(f) Fie $Y = \begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ r & s & t \end{pmatrix}$ astfel ca $AY = YA$. Facând inmulţirile, aceasta egalitate matriceală se traduce prin

$$\begin{pmatrix} u + 2r & v + 2s & w + 2t \\ 3r & 3s & 3t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x & 2x + 3y \\ 0 & u & 2u + 3v \\ 0 & r & 2r + 3s \end{pmatrix}$$

Din egalitatea elementelor de pe poziţia $(2, 1)$ (a doua linie, prima coloană) rezultă $r = 0$. Atunci din egalitatea elementelor de pe poziţia $(1, 1)$, rezultă $u = -2r = 0$. Continuăm şi de pe poziţia $(2, 2)$ avem $s = \frac{u}{3} = 0$. De pe poziţia $(1,2)$ rezultă $v = x$ şi apoi de pe poziţia $(2,3)$ avem $t = v = x$. In final din egalitatea corezpunzătoare la poziţia $(1,3)$ deducem $w = x + 3y$. In consecinţă, matricile Y cu proprietatea $AY = YA$ sunt de forma

$$Y = \boxed{\begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & x+3y \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} = xI_3 + yA + zA^2,\ x, y, z \in \mathbb{R}}$$

(g) **Prima soluţie.** Procedăm prin reducere la absurd. Presupunem că există o matrice $Z \in M_3(\mathbb{R})$ astfel ca $Z^2 = A$. Atunci $Z \cdot A = Z \cdot Z^2 = Z^2 \cdot Z = A \cdot Z$. Conform punctului precedent, există $x, y, z \in \mathbb{R}$ astfel ca $Z = xI_3 + yA + zA^2$. Atunci, observând că $A^3 = O_3$, avem $A = Z^2 = (xI_3 + yA + zA^2)^2 = x^2I_3 + y^2A^2 + z^2A^4 + 2xyA + 2xzA^2 + 2yzA^3 = x^2I_3 + 2xyA + (y^2 + 2xz)A^2$. In egalitatea matriceală

$$A = x^2I_3 + 2xyA + (y^2 + 2xz)A^2$$

matricea din membrul stâng are elementul 0 pe prima linie şi prima coloană, iar cea din dreapta are x^2, deci $x = 0$. Egalitatea devine $A = y^2A^2$, egalitate imposibilă căci matricea din stânga are 1 pe prima linie a doua coloană, în timp ce matricea din dreapta are 0. Contradiţia obţinută demonstrează că presupunerea făcută este falsă, deci nu există o asemenea matrice Z.
A doua soluţie. Presupunem prin absurd că există o matrice $Z \in M_3(\mathbb{R})$ astfel ca $Z^2 = A$. Atunci $Z^6 = A^3 = O_2$. Folosind teorema Hamilton–Cayley, obţinem $Z^3 = O_2$. Dar în acest caz rezultă

$$A^2 = Z^4 = O_2\,,$$

absurd.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Folosind (c), avem $\boxed{a_1 < a_2 < a_3}$.
(b) Fie $k \in \mathbb{N}^*$. Atunci aducând la acelaşi numitor, avem

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{k+2-k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

(c) Deoarece, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} > 0\,,$$

rezultă că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict crescător.

(d) Folosind punctul (b), avem

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) \end{aligned}$$

(e) Conform punctului precedent, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \boxed{\frac{1}{4}}$.

(f) Folosind iar punctul (d), avem $L = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}+a_n\right)^{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}\right)^{n^2}$.

Pentru a folosi faptul că $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$ aranjăm limita astfel:

$$L = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}\right)^{-2(n+1)(n+2)}\right]^{\frac{n^2}{-2(n+1)(n+2)}} = \boxed{e^{-1/2}}$$

(g) Cu acelaşi gen de calcul ca la (b), avem

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x+1)(x+2)} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x(x+1)}-\frac{1}{(x+1)(x+2)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}\right) \\ &= \frac{1}{2x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2(x+2)}. \end{aligned}$$

Aceasta este, de fapt, descompunerea în fracţii simple a funcţiei raţionale de sub integrală. Atunci integrala se poate scrie

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)(x+2)}\,dx = \int_1^2\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2(x+2)}\right)dx \\ &= \left(\frac{1}{2}\ln x-\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x+2)\right)\Big|_1^2 = \boxed{\frac{1}{2}\ln\frac{32}{27}} \end{aligned}$$

Pro Didactica vă urează succes la BAC.
De la toamnă vă aşteptăm cu întrebări din materia de facultate.