BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 36

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 36

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Avem $|\sqrt{2}-\sqrt{7}i| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt{7}\right)^2} = \sqrt{9} = \boxed{3}$.

(b) Cu formula distanţei (teorema lui Pitagora) obţinem

$$|AC| = \sqrt{(11-7)^2+(3-2)^2} = \boxed{\sqrt{17}}$$

(c) Cum $i+i^4+i^6+i^{11} = i+1+(-1)+(-i) = 0$, partea reală este $\boxed{0}$.

(d) Punem condiţia ca coordonatele punctelor A şi C să verifice ecuaţia dreptei. Obţinem sistemul

$$\begin{cases} 7+2a+b=0 \\ 11+3a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7+2a+b=0 \\ 4+a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} b=1 \\ a=-4 \end{cases}}$$

(e) Aria triunghiului ABC este $S=\frac{1}{2}|\Delta|$, unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 11 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 1 & 11 & 3 \end{vmatrix} = -5.$$

(am scăzut din a doua linie pe prima). Aşadar aria căutată este $S=\boxed{\frac{5}{2}}$.

(f) $\cos^2 x = 1-\sin^2 x = 1-\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \boxed{\frac{9}{25}}$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Produsul are ca factori pe $\hat{2}$ şi $\hat{4}$. Deoarece $\hat{2}\cdot\hat{4}=\hat{0}$ întreg produsul este egal cu $\boxed{\hat{0}}$.

(b) În general $C_n^k = C_n^{n-k}$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ şi $k\in\mathbb{N}$, $k\le n$. Deci $C_7^3-C_7^4+C_{10}^{10} = C_7^3-C_7^3+1=\boxed{1}$.

(c) $\log_4 x = 2 \Leftrightarrow x=4^2=\boxed{16}$.

(d) Avem $16^x = 32^x \Leftrightarrow \dfrac{32^x}{16^x} = 1 \Leftrightarrow 2^x = 1 \Leftrightarrow \boxed{x = 0}$.

(e) Funcţia $x \mapsto 5^x$ este strict crescătoare. Deoarece $5^1 < 5^2 = 25 < 30 < 125 = 5^3 < 5^4 < 5^5$ inegalitatea din enunţ este satisfăcută numai de $n \in \{3, 4, 5\}$.

Probabilitatea căutată este $\boxed{p = \dfrac{3}{5}}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) $f'(x) = 5x^4 + 12x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b)

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(x^5 + 4x^3 - 5\right)\,dx = \left(\frac{x^6}{6} + x^4 - 5x\right)\Bigg|_0^1 = \boxed{-\frac{23}{6}}$$

(c) Limita este tocmai derivata funcţiei f în $x = 0$, adică $\boxed{f'(0) = 0}$.

(d) Cu formula găsită la (a) observăm că $f'(x) > 0$, $\forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Deci f este strict crescătoare pe fiecare din intervalele **semiînchise** $(-\infty, 0]$ respectiv $[0, \infty)$, prin urmare este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

(e) Simplificând forţat atât numărătorul cât şi numitorul cu $\sqrt{n}$ obţinem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4\sqrt{n} + 3}{7\sqrt{n} + 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{4 + \frac{3}{\sqrt{n}}}{7 + \frac{2}{\sqrt{n}}} = \frac{4 + 0}{7 + 0} = \boxed{\frac{4}{7}}$$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Fie $u, v \in A$. Atunci u este de forma $u(x) = ax^2 + bx + c$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Rezultă

$$(u \circ v)(x) = u(v(x)) = \overbrace{\underbrace{av(x)^2}_{\text{gradul=4}} + \underbrace{bv(x)}_{\text{gradul=2}} + c}^{\text{polinom de gradul 4}}$$

(b) Graficul funcţiei f este o parabolă ce are ca axă de simetrie dreapta $x = -\dfrac{b}{2a}$. Pentru un argument explicit, putem exprima funcţia f într-un mod convenabil:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

de unde rezultă şi afirmaţia din enunţ.

(c) Într-adevăr luând $u(x) = v(x) = x^2$ obţinem $(u \circ u)(x) = (x^2)^2 = x^4 = s(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(d) Inspirându-ne din propoziţia de la (b) alegem funcţia $g(x) = (x-1)^4$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Atunci

$$g(1-x) = g(1+x) = x^4, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(e) Fie $a \in \mathbb{R}$ fixat. Introducem funcţia $u(x) = h(a+x)-h(a-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Observăm că

$$u(x) = 8ax(x^2+a^2) + 2x, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

deci u este o **funcţie polinomială neconstantă de grad impar** (dacă $a = 0$ este de gradul întâi, altfel este de gradul trei). Prin urmare există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $u(x) \neq 0$, q.e.d.

(f) Fie $w \in C$. Din definiţie, există $u, v \in A$ astfel încât $w = u \circ v$. Aplicând punctul (b) funcţiei v, există $c \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $v(c-x) = v(c+x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Rezultă atunci şi

$$w(c-x) = u(v(c-x)) = u(v(c+x)) = w(c+x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(g) Combinând rezultatele de la punctele (e) şi (f) obţinem $h \in B \setminus C$, q.e.d. Evident, h reprezintă polinomul introdus în enunţul punctului (e).

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Verificare trivială:

$$1 + \int_0^x (1+2t+3t^2+4t^3)\,dt = 1 + (t+t^2+t^3+t^4)\Big|_0^x = F(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(b) Fără a mai calcula, din definiţia funcţiei F aceasta este o primitivă a lui f, conform teoremei Leibnitz–Newton.

(c) Identitatea se obţine direct din formula sumei primilor cinci termeni ai unei progresii geometrice de raţie x. Pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ avem $F(x) = \dfrac{x^5-1}{x-1}$, de unde rezultatul cerut. Cazul $x = 1$ se verifică direct.

(d) Funcţia $x \mapsto x^5$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$. Observăm că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$, numerele $x-1$ şi x^5-1 **au acelaşi semn**, deci raportul lor $F(x)$ este **pozitiv.** Rămâne să constatăm şi că $F(1) = 5 > 0$.

(e) Deoarece $F'' = (f')'$ avem $F''(x) = 2 + 6x + 12x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Funcţia de gradul doi obţinută este strict pozitivă, având coeficientul dominant pozitiv ($12 > 0$) şi discriminantul negativ ($\Delta = 36 - 96 < 0$). Reţinem doar faptul că $F''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci F este convexă pe $\mathbb{R}$.

(f) Raportul de sub limită este o funcţie raţională cu proprietatea că gradele numărătorului şi ale numitorului coincid. Limita va fi egală cu raportul dintre coeficienţii dominanţi, adică $\dfrac{4}{1}$. Pentru cei nesatisfăcuţi de acest argument, prezentăm şi calculul propriu-zis. Ca de obicei, vom da factor comun forţat la numitor şi numărător puterea cea mai mare a lui n:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2n^2+3n^3+4n^4}{1+n+n^2+n^3+n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^3}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n}+4}{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}+1} = \frac{0+0+0+4}{0+0+0+0+1} = \boxed{4}$$

(g) Am văzut la punctul (e) că derivata lui f este strict pozitivă, deci f este strict crescătoare. Atunci funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x^3)$ este strict crescătoare fiind compunerea dintre funcţiile strict crescătoare f şi $x \mapsto x^3$. Ca o consecinţă, g este injectivă. Observând că $g(0) = f(0^3) = f(0) = 1$ şi folosind injectivitatea lui g rezultă că unica rădăcină a ecuaţiei este $x = \boxed{0}$.

Pro Didactica vă urează succes la BAC.
De la toamnă vă aşteptăm cu întrebări din materia de facultate.