BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 34

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 34

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Cu formula uzuală (teorema lui Pitagora) avem

$$BC = \sqrt{(1+1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{4+4} = \boxed{2\sqrt{2}}.$$

(b) Fie D simetricul lui B faţă de A. Atunci A este mijlocul lui (BD), deci $x_D = 2x_A - x_B$ şi $y_D = 2y_A - y_B$, adică

$$\boxed{x_D = 1, y_D = 3}$$

(c) Avem $|z| = \dfrac{|b|}{|c|} = \dfrac{|1-i|}{|-1+i|} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \boxed{1}$.

(d) Cum $w = b \cdot c = (1-i)(-1+i) = -1+i+i+1 = 2i$, partea sa reală este $\boxed{0}$.

(e) Din egalitatea $1+i = \sqrt{2}\cos t + i \cdot \sqrt{2}\sin t$ deducem $\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$, de unde $\boxed{t = \dfrac{\pi}{4}}$.

(f) Aria este dată de $S = \frac{1}{2}|\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1-1+1-1-1-1 = -4$.

Deci $\boxed{S = 2}$.

2. Subiectul II.1

Rezolvare.

(a) $\det(A) = 2 \cdot 7 - 0 \cdot 0 = \boxed{14}$

(b) Deoarece $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 49 \end{pmatrix}$, suma elementelor este $4 + 49 = \boxed{53}$.

(c) Din ipoteză avem $4 = cd$, $d^2 = 16$, iar de aici rezultă $d = 4, c = 1$ deci $\boxed{c + d = 5}$.

(d) Verificăm succesiv $\hat{2} \cdot \hat{0} = \hat{0},\ \hat{2} \cdot \hat{1} = \hat{2},\ \hat{2} \cdot \hat{2} = \hat{4},\ \hat{2} \cdot \hat{3} = \hat{6},\ \hat{2} \cdot \hat{4} = \hat{0},\ \hat{2} \cdot \hat{5} = \hat{2},\ \hat{2} \cdot \hat{6} = \hat{4},\ \hat{2} \cdot \hat{7} = \hat{6}$. Soluţiile sunt deci $\boxed{x \in \{\hat{2}, \hat{6}\}}$.

(e) Numărul de moduri este $C_7^2 = \frac{7!}{2!5!} = \frac{6\cdot 7}{2} = \boxed{21}$.

3. Subiectul II.2

Rezolvare.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+3}{5n-1} = \boxed{\frac{2}{5}}$.

(b) Folosind regula lui l'Hopital pentru o nedeterminare de tipul $\frac{0}{0}$, avem

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{10}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{10x^9}{1} = \boxed{10}.$$

(c) $\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\,dx = \left.\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right|_0^1 = \boxed{\frac{2}{5}}$

(d) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $f'(x) = \boxed{2^x \ln 2}$.

(e) Deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, rezultă că dreapta de ecuaţie $\boxed{y=0}$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$.

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a)

$$\begin{aligned} E_2(2,2)+F_2(2,2) &= (2+\sqrt{2})^2+(2-\sqrt{2})^2 \\ &= (4+4\sqrt{2}+2)+(4-2\sqrt{2}+2) = 12 \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

(b) $E_n(2,2)\cdot F_n(2,2) = (2+\sqrt{2})^n(2-\sqrt{2})^n = (4-2)^n = 2^n \in \mathbb{N}$

(c) Notăm $P(n) : 2^n > n^2$

Verificarea: Intr-adevăr avem $P(5) : 2^5 = 32 > 25 = 5^2$.

Pasul de inducţie: Presupunem $P(n)$ adevărată şi demonstrăm că $P(n+1)$ este adevărată, adică $2^{n+1} > (n+1)^2$. Avem

$$2^n > n^2 \Leftrightarrow 2\cdot 2^n > 2n^2 \Leftrightarrow 2^{n+1} > 2n^2$$

Este suficient să demonstrăm că

$$2n^2 > (n+1)^2 \Leftrightarrow n^2-2n-1>0 \Leftrightarrow n \in (-\infty, 1-\sqrt{2}) \cup (1+\sqrt{2}, \infty)$$

relaţie adevărată deoarece $n \geq 5$.

(d) Relaţia se scrie

$$(2+\sqrt{2})^n(2-\sqrt{2})^n = n^2 \Leftrightarrow 2^n = n^2$$

Conform punctului precedent, este suficient să verificăm pentru $n \in \{0,1,2,3,4\}$. Obţinem soluţiile $n = \boxed{2}$ şi $n = \boxed{4}$.

(e) Calculăm $x_1 = E_1(3,2) = 3 + \sqrt{2}$. Considerăm şi conjugatul $x_2 = 3 - \sqrt{2}$ şi calculăm $s = x_1 + x_2 = 6$ şi $P = x_1 x_2 = 7$. Ecuaţia care are ca rădăcini pe x_1 şi x_2 este $\boxed{x^2 - 6x + 7 = 0}$.

(f) Polinomul determinat la punctul precedent $f = \boxed{x^2 - 6x + 7}$.

(g) Termenul general al dezvoltării $E_{20}(3,2) = (3+\sqrt{2})^{20}$ este $T_{k+1} = C_{20}^k 3^{20-k}(\sqrt{2})^k$. Observăm că T_{k+1} este raţional dacă şi numai dacă k este par $\Leftrightarrow k \in \{0, 2, 4, ..., 20\}$. Deci există $\boxed{11}$ termeni raţionali.

5. Subiectul IV

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $f'(x) = \boxed{1 - 3x^2}$.

(b) Punctele critice sunt date de

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \boxed{\pm\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

Cum f' schimbă semnul în aceste puncte, ele vor fi de extrem local.

(c)

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 (x - x^3)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{4}{2} - \frac{16}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \boxed{-\frac{9}{4}}$$

(d) **Prima rezolvare.** Având un caz de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$ folosim regula lui l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{f(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1 - 3x^2} = \frac{1}{1-0} = \boxed{1}.$$

Rezolvare alternativă. Aranjăm limita sub forma următoare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{f(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{1 - x^2} = 1 \cdot 1 = \boxed{1}.$$

(e) Căutăm mai întâi valoarea maximă a lui f pe intervalul $[0,1]$. Deoarece în intervalul $[0,1]$ funcţia f are punctul critic $\frac{\sqrt{3}}{3}$, iar $f'(x) > 0$ pentru $x \in [0, \frac{\sqrt{3}}{3})$ şi $f'(x) < 0$ pentru $x \in (\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty)$, va rezulta că f are maximul în punctul $\frac{\sqrt{3}}{3}$, maxim egal cu

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{27} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

Atunci m este cel mai mic număr întreg cu proprietatea $m \geq \frac{2\sqrt{3}}{9}$, adică $m = \boxed{1}$.

(f)
$$a_{n+1} = a_n - a_n^3 = a_n(1 - a_n^2)$$
Notăm cu $P(n)$ propozitiţia $a_n \in (0, 1)$. Demonstrăm prin inducţie că $P(n)$ este satisfăcută pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Verificarea: $P(1)$ este ipoteza $a_1 \in (0, 1)$.

Pasul de inducţie: Presupunem $P(n)$ adevărată şi demonstrăm că $P(n+1)$ este adevărată. Intr-adevăr $a_{n+1} = a_n(1 - a_n^2) \in (0, 1)$ deoarece $a_n \in (0, 1)$ conform presupunerii făcute şi de asemenea $1 - a_n^2 \in (0, 1)$. Conform principiului inducţiei matematice, rezultă că $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

(g) Deoarece $a_{n+1} - a_n = -a_n^3 < 0, \forall n \geq 1$, şirul (a_n) este strict descrescător.