BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 33

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 33

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Mijlocul segmentului $[AB]$ este punctul de coordonate

$$\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right) = \boxed{(2,2,2)}$$

(b) $\sin\frac{\pi}{6} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + 1 = \boxed{\frac{3}{2}}$

(c) Deoarece $(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 2i$, avem $(1+i)^{10} = (2i)^5 = 32i$, cu partea reală egală cu $\boxed{0}$.

(d) Coordonatele (x,y) ale punctului de intersecţie (ipotetic, deocamdată) al celor două drepte satisfac sistemul

$$\begin{cases} x+y+3 & =0 \\ 3x-y-1 & =0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+3 & =0 \\ 4x+2 & =0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}+y+3 & =0 \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Aşadar cele două drepte se intersectează în punctul $\boxed{\left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)}$.

(e) Aria triunghiului este $S = \frac{|\Delta|}{2}$, unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -7,$$

deci $\boxed{S = \frac{7}{2}}$.

(f) Punctul $A(3\alpha, 4\alpha)$ aparţine cercului dat dacă şi numai dacă

$$(3\alpha)^2 + (4\alpha)^2 = 25 \Leftrightarrow 25\alpha^2 = 25 \Leftrightarrow \alpha^2 = 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha \in \{-1, 1\}}.$$

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Numerele $100, x, 10$ sunt în progresie aritmetică dacă şi numai dacă $x-100 = 10-x \Leftrightarrow 2x = 110 \Leftrightarrow \boxed{x = 55}$.

(b) Funcţia $n \mapsto n!$ **creşte** extrem de rapid. Va fi suficient să calculăm valorile ei pentru valori mici ale lui n. Avem

$$1! < 2! < 3! < \underbrace{4!}_{=24} < \underbrace{5!}_{=120} < \underbrace{6!}_{=720} < 2007 < \underbrace{7!}_{=5040} < 8! < 9!\,.$$

Prin urmare inegalitatea $n! < 2007$ este satisfăcută de 6 numere din 9, probabilitatea acestui eveniment fiind $p = \frac{6}{9} = \boxed{\frac{2}{3}}$.

(c) Notăm cu $t = 2^x$. Ecuaţia devine $t^2 - 2t - 8 = 0 \iff t \in \{-2, 4\}$. Revenim la necunoscuta x. Ecuaţia $2^x = -2$ nu are soluţii reale, iar ecuaţia $2^x = 4$ are soluţia unică $\boxed{x = 2}$.

(d) Conform teoremei lui Bézout, restul împărţirii polinomului $f = X^3$ la $g = X + 1$ este $\boxed{r = f(-1) = -1}$.

(e) $\log_2\left(\log_3 9\right) = \log_2 2 = \boxed{1} \in \mathbb{Z}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) $f(0) = e^0 - 0 = \boxed{1}$.

(b) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $f'(x) = \boxed{e^x - 1}$.

(c) Se vede direct din formula de mai sus că $f'(x) > 0$, $\forall x \in (0, \infty)$, deci f este strict descrescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.

(d) Deoarece este f este strict crescătoare pe $[0, \infty)$ avem $f(x) \geq f(0) > 0$, $\forall x \in [0, \infty)$. În plus f este continuă, deci aria regiunii considerate în enunţ este

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (e^x - x)\,dx = \left(e^x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = e - 1 - \frac{1}{2} = \boxed{e - \frac{3}{2}}.$$

(e) Deoarece $\frac{f(x)}{x^2} = \frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x}$ şi pe de altă parte $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, rezultă că limita din enunţ are aceeaşi natură ca şi limita $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2}$. Pentru a calcula ultima limită, folosim regula lui l'Hopital în mod repetat (atâta timp cât avem de calculat o limită nedeterminată):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \boxed{\infty}.$$

4. Subiectul III.

Rezolvare. Înainte de a răspunde cerinţelor problemei să observăm că, deoarece $\omega + \overline{\omega} = 2$ şi $\omega \cdot \overline{\omega} = -1$, numerele ω şi $\overline{\omega}$ sunt rădăcinile ecuaţiei

$$x^2 - 2x - 1 = 0\,.$$

(a) Putem scrie $0 = 0 + 0 \cdot \sqrt{2}$, $1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{2}$, $\omega = 1 + 1 \cdot \sqrt{2}$ şi $\overline{\omega} = 1 - 1 \cdot \sqrt{2}$, deci $\{0, 1, \omega, \overline{\omega}\} \subset H$.

(b) Folosind observaţia de la începutul rezolvării, avem

$$\omega^2 - 2\omega - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \omega^2 = 2\omega + 1\,.$$

De asemenea,

$$\overline{\omega}^2 - 2\overline{\omega} - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \overline{\omega}^2 = 2\overline{\omega} + 1\,.$$

Notă. Relaţiile de mai sus se pot obţine şi prin calcul direct:

$$\omega^2 = (1 + \sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 1 + 2(1 + \sqrt{2}) = 2\omega + 1\,.$$

(c) Fie $x = a + b\sqrt{2} \in H$ şi $y = c + d\sqrt{2} \in M$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Atunci

$$x + y = a + b\sqrt{2} + c + d\sqrt{2} = a + c + (b + d)\sqrt{2} \in H$$

De asemenea,

$$\begin{aligned} xy &= (a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) \\ &= ac + ad\sqrt{2} + bc\sqrt{2} + bd(\sqrt{2})^2 \\ &= ac + 2bd + (ad + bc)\sqrt{2} \in H\,. \end{aligned}$$

(d) Într-adevăr, $\omega(-\overline{\omega}) = (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = 2 - 1 = 1$.

(e) Rescriem identitatea de la punctul (b):

$$\omega^2 = 2\omega + 1 \;\Leftrightarrow\; \omega(-2 + \omega) = 1\,.$$

Deoarece $-2 + \omega \in H$, rezultă $\omega \in G$ chiar din definiţia mulţimii G.

(f) Mulţimea G împreună cu operaţia uzuală de înmulţire este grup comutativ (subgrup al lui $\mathbb{R}^*$). Acest fapt rezultă direct din punctul (c) (H este parte stabilă) şi din definiţia lui G. Reamintim că $\omega \in G$. De aici, $\omega^n \in G$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Cum $\omega = 1 + \sqrt{2} > 1$, rezultă că şirul puterilor naturale ale lui ω este strict crescător, deci aceste numere sunt două câte două distincte. Aşadar G conţine o infinitate de elemente.

(g) Presupunem prin absurd că $\omega^{2007} = \frac{p}{q}$, unde $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$.

Prima soluţie. Folosim binomul lui Newton. Avem

$$\begin{aligned}
\omega^{2007} &= (1+\sqrt{2})^{2007} = \sum_{n=0}^{2007} C_{2007}^{n}\left(\sqrt{2}\right)^{n} \\
&= \underbrace{\left(C_{2007}^{0} + C_{2007}^{2}\cdot 2 + \ldots + C_{2007}^{2006}\cdot 2^{1003}\right)}_{\in \mathbb{Q}^*} + \\
&\quad + \sqrt{2}\cdot \underbrace{\left(C_{2007}^{1} + C_{2007}^{3}\cdot 2 + \ldots + C_{2007}^{2007}\cdot 2^{1003}\right)}_{\in \mathbb{Q}^*},
\end{aligned}$$

aşadar $\omega^{2007} \notin \mathbb{Q}$, absurd.

A doua soluţie. Introducem polinoamele $f = X^{2007} - \frac{p}{q}$ şi $g = X^2 - 2X - 1$. Polinomul g este ireductibil peste $\mathbb{Q}$, deoarece rădăcinile sale $\omega, \overline{\omega}$ sunt amândouă iraţionale. Pe de altă parte, $f(\omega) = g(\omega) = 0$. Fie h cel mai mare divizor comun al polinoamelor f şi g. Atunci gradul lui h este cel puţin egal cu 1, iar $h \in \mathbb{Q}[X]$. Fiind un divizor al lui g, din ireductibilitatea polinomului g rezultă $h = g$. În consecinţă, $\overline{\omega}$ este o altă rădăcină a lui f. De aici rezultă $\omega^{2007} = \overline{\omega}^{2007} = \frac{p}{q}$, deci

$$(1+\sqrt{2})^{2007} = (1-\sqrt{2})^{2007} \Rightarrow |1+\sqrt{2}| = |1-\sqrt{2}|,$$

absurd.

A treia soluţie. Deoarece $\omega \neq 0$ rezultă $p \neq 0$, aşadar

$$\overline{\omega}^{2007} = \left(-\frac{1}{\omega}\right)^{2007} = -\frac{q}{p} \in \mathbb{Q}.$$

Aplicând eventual în mod repetat punctul (c) rezultă $\overline{\omega}^{2007} \in H$, deci există $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\overline{\omega}^{2007} = a + b\sqrt{2}$. Deoarece am văzut că $\overline{\omega}^{2007} \in \mathbb{Q}$ rezultă $b = 0$ (altfel ar rezulta că $\sqrt{2}$ este raţional). Deci $a = \overline{\omega}^{2007}$, de unde $|a| = |\overline{\omega}|^{2007} < 1$ (deoarece $-1 < \overline{\omega} < 0$). Fiind număr întreg, rezultă $a = 0$ şi de aici $\overline{\omega}^{2007} = 0$, adică $\overline{\omega} = 0$, absurd.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x > 0$ avem $f'(x) = \boxed{e^x}$ şi $g'(x) = \boxed{-\frac{1}{x^2}}$.

(b) Avem

$$\int_1^2 (e^x)^2\,dx = \int_1^2 e^{2x}\,dx = \left.\frac{e^{2x}}{2}\right|_1^2 = \boxed{\frac{e^4 - e^2}{2}}.$$

(c) Avem

$$\int_1^2 g^2(x)\,dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx = \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2 = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

(d) Cum g este continuă pe domeniul de definiţie, graficul lui g poate avea o asimptotă verticală doar în $x = 0$. Deoarece $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$, graficul lui g are ca asimptotă verticală dreapta de ecuaţie $\boxed{x = 0}$.

(e) Fie $t \in \mathbb{R}$ şi $x > 0$. Atunci

$$t^2 e^{2x} - 2t\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x^2} = \left(te^x - \frac{1}{x}\right)^2 \geq 0$$

(f) Fie $t \in \mathbb{R}$ arbitrar. Integrând inegalitatea de la (e) (exact cum ni s-a "suflat") şi folosind monotonia şi liniaritatea integralei, obţinem

$$t^2 \int_1^2 e^{2x}\,dx - 2t \int_1^2 \frac{e^x}{x}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx = \int_1^2 \left(t^2 e^{2x} - 2t\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx \geq 0$$

(g) Considerăm funcţia de gradul doi $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$h(t) = t^2 \int_1^2 e^{2x}\,dx - 2t \int_1^2 \frac{e^x}{x}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx\,.$$

Conform punctului precedent, avem $h(t) \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Atunci discriminantul acestei funcţii de gradul doi este mai mic sau egal cu zero. Explicitând, obţinem

$$4\left(\int_1^2 \frac{e^x}{x}\,dx\right)^2 - 4\left(\int_1^2 e^{2x}\,dx\right)\left(\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx\right) \leq 0$$

inegalitate care este evident echivalentă cu cea din enunţ.

Observaţie. Rezultatul de la ultimul punct se generalizează (urmând **exact** ideile de mai sus) la următoarea inegalitate, valabilă pentru orice funcţii integrabile f şi g pe un interval $[a, b]$:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b g^2(x)\,dx\,.$$

Această importantă inegalitate este cunoscută sub numele de inegalitatea *Cauchy–Schwartz* sau *Cauchy–Buniakowski–Schwartz*.

PRO DIDACTICA VĂ UREAZĂ SUCCES LA BAC.
DE LA TOAMNĂ VĂ AŞTEPTĂM CU ÎNTREBĂRI DIN MATERIA DE FACULTATE.