BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 32

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 32

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Cum $z = i^{10} - i^{11} = (i^2)^5 - (i^2)^5 \cdot i = (-1)^5 - (-1)^5 \cdot i = -1 + i$, avem $\overline{z} = \boxed{-1 - i}$.

(b) $1 + (a \cdot i)^2 = 0 \Leftrightarrow 1 + a^2 \cdot i^2 = 0 \Leftrightarrow 1 - a^2 = 0 \Leftrightarrow a = \boxed{\pm 1}$

(c) $\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1}$

(d) Cum $\sin 15^\circ \neq 0$ şi $\cos 15^\circ \neq 0$, avem

$$\operatorname{tg} 15^\circ \cdot \operatorname{ctg} 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} \cdot \frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} = \boxed{1}$$

(e) Coordonatele punctului A trebuie să satisfacă ecuaţia dreptei, deci avem $2c - 1 - 3 = 0 \Leftrightarrow c = \boxed{2}$. Similar, coordonatele lui B trebuie să satisfacă ecuaţia dreptei, deci $2 \cdot 2 - d - 3 = 0 \Leftrightarrow d = \boxed{1}$.

(f) Originea $\boxed{(0,0)}$ aparţine parabolei date : $0^2 = 4 \cdot 0$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Folosind proprietăţile logaritmilor, avem

$$\log_2 3 - \log_2 6 = \log_2 \frac{3}{6} = \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = \boxed{-1} \in \mathbb{Z}$$

(b) $\begin{vmatrix} \sqrt{1} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & \sqrt{6} \end{vmatrix} = \sqrt{1} \cdot \sqrt{6} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6} - \sqrt{6} = \boxed{0}$

(c) Conform relaţiilor lui Viète, $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{2}{1} = \boxed{-2}$.

(d) $f(g(\sqrt{3})) = f((\sqrt{3})^2 - 3) = f(3 - 3) = f(0) = 0 - 3 = \boxed{-3}$.

(e) Cum $3^3 = 27 < 30 < 81 = 3^4$, numărul căutat este $m = \boxed{3}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) Deoarece $a_{n+1}-a_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict crescător.

(b) Fie $f(x) = \boxed{0}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ şi $g(x) = \boxed{x^2-2x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Avem atunci $f'(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ şi $g'(x) = 2x-2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci $f'(1) = 0 = g'(1)$.
Dacă acest exemplu nu v-a plăcut încercaţi $f(x) = x$ şi $g(x) = x + 2007$. In acest caz, $f'(x) = g'(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

(c) Derivata funcţiei f este $f'(x) = 3x^2 - 3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Ecuaţia $f'(x) = 0$ are rădăcinile $x = \pm 1$. Cum f' îşi schimbă semnul în aceste puncte, rezultă că f are $\boxed{2}$ puncte de extrem local.

(d) Având un caz de nedeterminare $\frac{0}{0}$, aplicăm regula lui l 'Hopital şi avem $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x-5}{2x} = \dfrac{2\cdot 3-5}{2\cdot 3} = \boxed{\dfrac{1}{6}}$

(e) Cum $\displaystyle\int_2^3 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_2^3 = \frac{3^2-2^2}{2} = \frac{5}{2}$, cel mic număr natural cu proprietatea $\displaystyle\int_2^3 x\,dx = \frac{5}{2} \le n$ este $n = \boxed{3}$.

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(c) **Comentariu:** Ştim că (a) şi (b) erau înainte de (c), dar aşa nu mai repetăm calculele.
Pentru orice $z, u \in \mathbb{C}$ avem

$$(z+i)(u+i) - i = zu + iz + iu + i^2 - i = zu + i(z+u) - 1 - i = z \circ u\,.$$

(a) Folosind punctul (c), avem $(1-i)\circ i = [(1-i)+i][i+i] - i = 1\cdot 2i - i = \boxed{i}$

(b) Legea de compoziţie este evident comutativă, deci este suficient să găsim e astfel încât $z \circ e = z$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Folosind punctul (c) aceasta condiţie este echivalentă cu faptul că $(z+i)(e+i) = z+i, \forall z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow e+i = 1 \Leftrightarrow e = \boxed{1-i}$

(d) Folosind punctul (b), cum $e = 1-i$ este element neutru, avem $z \circ (1-i) = z$. Deci $z \circ (1-i) = 3+i \Leftrightarrow z = \boxed{3+i}$.

(e) Folosim iar observaţia că legea de compoziţie este comutativă şi este suficient să găsim f cu proprietatea că $z \circ f = f$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Conform (c) aceasta este echivalentă cu $(z+i)(f+i) = f+i, \forall z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow f+i = 0 \Leftrightarrow f = \boxed{-i}$.

(f) Fie $z, u, w \in \mathbb{C}$. Folosind iar punctul (c) avem

$$\begin{aligned}
(z \circ u) \circ w &= [(z \circ u) + i](w + i) - i \\
&= [(z + i)(u + i) - i + i](w + i) - i \\
&= (z + i)(u + i)(w + i) - i \\
z \circ (u \circ w) &= (z + i)[(u \circ w) + i] - i \\
&= (z + i)[(u + i)(w + i) - i + i] - i \\
&= (z + i)(u + i)(w + i) - i
\end{aligned}$$

deci $(z \circ u) \circ w = z \circ (u \circ w)$.

(g) *Verificarea.* Pentru $n = 1$, avem evident $z = (z + i)^1 - i$, $\forall z \in \mathbb{C}$.
Pasul de inducție. Presupunem că $\underbrace{z \circ z \circ \ldots \circ z}_{n-ori} = (z + i)^n - i$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Atunci

$$\begin{aligned}
\underbrace{z \circ z \circ \ldots \circ z}_{n+1-ori} &= (\underbrace{z \circ z \circ \ldots \circ z}_{n-ori}) \circ z \\
&= [(z + i)^n - i] \circ z = [(z + i)^n - i + i](z + i) - i \\
&= (z + i)^{n+1} - i, \quad \forall z \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Conform principiului inducției demonstrația este încheiată.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) **Comentariu:** Observăm că domeniul de definiție al funcțiilor f_k poate fi schimbat în $\mathbb{R}$. Astfel evităm să calculăm o derivată laterală la dreapta în $x = 0$.
Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $f_1(x) = \dfrac{1}{n} \cdot x^n - x$, deci $f'(x) = \boxed{x^{n-1} - 1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} f_1(1) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n} - 1\right) = \boxed{-1}$.

(c)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f_1(x)\,dx &= \int_0^1 \left(\frac{1}{n}x^n - x\right) dx = \left(\frac{x^{n+1}}{n(n+1)} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \boxed{\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

(d) Calculăm derivata: $f_k'(x) = kx^{n-1} - kx^{k-1} = kx^{k-1}(x^{n-k} - 1)$. Pe intervalul $(0, \infty)$ avem un singur punct critic, $x = 1$, căci ecuația $f_k'(x) = 0$ are această unică rădăcină pozitivă. Pentru $x \in (0, 1)$, avem, $f_k'(x) < 0$ și pentru $x > 1$ avem $f_k'(x) > 0$ (aici este esențială ipoteza $k < n$). Deci în $x = 1$ funcția f_k are un minim local (de fapt, dacă revenim la domeniul $[0, \infty)$ al funcției, exact ca în enunț, punctul este punct de minim global).

(e) Fie $n \geq 2$ si $k \in \mathbb{N}^*$, $k < n$. Am văzut la punctul precedent că $f_k(x) \geq f_k(1) = \frac{k}{n} - 1$ pentru orice $x \geq 0$. Or aceasta revine exact la inegalitatea $\frac{k}{n} \cdot x^n \geq x^k + \frac{k}{n} - 1$, $\forall x \geq 0$.

Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi $k = n$ nu mai putem folosi punctul (d), dar inegalitatea din enunţ se scrie $\frac{n}{n} \cdot x^n \geq x^n + \frac{n}{n} - 1$, care este evident o identitate pentru orice $x \geq 0$.

(f) Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $k \in \mathbb{N}^*$, $k \leq n$. Inegalitatea de la punctul precedent se poate scrie $f_k(x) \geq \frac{k}{n} - 1$, $\forall x \geq 0$. Integrând pe $[0, 1]$ şi folosind monotonia integralei, obţinem exact $\int_0^1 f_k(x)\,dx \geq \frac{k}{n} - 1$.

(g) Fie $x \geq 0$ şi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Scriem inegalitatea de la punctul (e) succesiv pentru $k = 1, 2, \ldots, n$ şi obţinem

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{n} \cdot x^n & \geq & x + \frac{1}{n} - 1 \\ \frac{2}{n} \cdot x^n & \geq & x^2 + \frac{2}{n} - 1 \\ \ldots & \geq & \ldots \\ \frac{n}{n} \cdot x^n & \geq & x^n + \frac{n}{n} - 1 \end{array}$$

Adunând aceste inegalităţi obţinem

$$\frac{1 + 2 + \ldots + n}{n} \cdot x^n \geq x + x^2 + \ldots + x^n + \frac{1 + 2 + \ldots + n}{n} - n$$

Folosim formula

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

şi inegalitatea precedentă capătă forma

$$\frac{n+1}{2} \cdot x^n \geq x + x^2 + \ldots x^n + \frac{n+1}{2} - n$$

Adunăm $\frac{n+1}{2}$ în ambii membri şi apoi împărţim la $\frac{n+1}{2}$ pentru a obţine exact inegalitatea din enunţ.

Pro Didactica vă urează succes la BAC.
De la toamnă vă aşteptăm cu întrebări din materia de facultate.