BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 31

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 31

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) $\left|\sqrt{15}-i\right| = \sqrt{(\sqrt{15})^2+(-1)^2} = \sqrt{16} = \boxed{4}$.

(b) Cu formula uzuală (teorema lui Pitagora) avem

$$|AB| = \sqrt{(4-3)^2+(14-12)^2} = \boxed{\sqrt{5}}.$$

(c) $S = i + 2i^2\cdot i + 3(i^2)^2\cdot i + 4(i^2)^3\cdot i = i - 2i + 3i - 4i = \boxed{-2i}$.

(d) Coordonatele punctelor trebuie să satisfacă ecuaţia dreptei. Obţinem astfel sistemul

$$\begin{cases} 3+12a+b &= 0 \\ 4+14a+b &= 0 \end{cases}$$

Scăzând prima ecuaţie din a doua, avem $1+2a=0$, de unde $a = \boxed{-\frac{1}{2}}$.

Substituind în prima ecuaţie, deducem $3-6+b=0$, de unde $b=\boxed{3}$.

(e) Aria triunghiului o calculăm cu formula $S = \frac{|\Delta|}{2}$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 14 \end{vmatrix} =$
$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 12 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 2 & 12 \end{vmatrix} = 8$. Deci $S = \boxed{4}$.

(f) Amplificând cu conjugatul numitorului obţinem $\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{1-i^2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$. Deci $a = \boxed{\frac{1}{2}}$ şi $b = \boxed{\frac{1}{2}}$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Î n inelul $\mathbb{Z}_8$ avem $\hat{4}^2 = \widehat{16} = \hat{0}$. Atunci $\hat{4}^{2007} = \hat{4}^2\cdot\hat{4}^{2005} = \hat{0}\cdot\hat{4}^{2005} = \boxed{\hat{0}}$.

(b) Folosind faptul că pentru orice $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq k$, avem $C_n^k = C_n^{n-k}$, deducem că $C_{11}^3 = C_{11}^8$. Atunci $C_{11}^3 - C_{11}^8 + C_9^9 = C_9^9 = \boxed{1}$.

(c) $\log_7 x = 0 \Leftrightarrow x = 7^0 = \boxed{1}$

(d) Ecuaţia se poate scrie $6^x = (6^2)^{x-1}$, sau $6^x = 6^{2x-2}$. Folosind injectivitatea funţiei exponenţiale, acesta este echivalentă cu $x = 2x - 2$, de unde $x = \boxed{2}$.

(e) Verificăm succesiv: $1^1 = 1 < 30$, $2^2 = 4 < 30$, $3^3 = 27 < 30$, $4^4 = 256 > 30$, $5^5 = 3125 > 30$. Cum 3 din cele 5 numere verifică inegalitatea, probabilitatea cerută este $\boxed{\frac{3}{5}}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) $f'(x) = \boxed{7x^6 + 30x^4}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) $\int_0^1 f(x)dx = \left(\frac{x^8}{8} + x^6 - 7x\right)\Big|_0^1 = \boxed{-\frac{47}{8}}$

(c) Din definiţia derivatei într-un punct, limita cerută este exact $f'(0) = \boxed{0}$.

(d) De la punctul (a) se vede că derivata lui f este pozitivă pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$. De aici rezultă că f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

(e) Scoţand $\sqrt{n}$ factor comun forţat atât la numitor cât şi la numărător, avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{9\sqrt{n}+1}{5\sqrt{n}+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{9+\frac{1}{\sqrt{n}}}{5+\frac{7}{\sqrt{n}}} = \frac{9+0}{5+0} = \boxed{\frac{9}{5}}.$$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Într-adevăr, $I_2 = 0 \cdot A + I_2 = X(0) \in G$

(b) Avem $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+1\cdot2 & 1\cdot1+1\cdot2 \\ 2\cdot1+2\cdot2 & 2\cdot1+2\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} = 3A$

(c) Am văzut la punctul (a) că $X(0) = I_2$. Atunci

$$X(0)\cdot X(a) = I_2 \cdot X(a) = X(a) = X(a)\cdot I_2 = X(a)\cdot X(0).$$

(d) Folosind punctul (b), avem

$$\begin{aligned} X(a)\cdot X(b) &= (aA+I_2)(bA+I_2) = abA^2 + aA + bA + I_2 \\ &= (3ab+a+b)A + I_2 \\ &= X(3ab+a+b), \quad \forall a,b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Este util să observăm şi faptul că toate matricile din G comutădouă câte două, adică $X(a)\cdot X(b) = X(b)\cdot X(a)$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$.

(e) Cum $\det A = 1\cdot2 - 2\cdot1 = \boxed{0}$, rangul matricei A nu este 2. Având cel puţin un element nenul (toate sunt nenule de fapt), rangul matricii A este $\boxed{1}$.

(f) Deoarece $X(a) = \begin{pmatrix} a+1 & a \\ 2a & 2a+1 \end{pmatrix}$, avem $\det A = (a+1)(2a+1) - 2a\cdot a = \boxed{3a+1}$.

(g) Conform punctului (d),

$$X(a)\cdot X\left(-\frac{1}{3}\right)=X\left(3\cdot a\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+a-\frac{1}{3}\right)=X\left(-\frac{1}{3}\right),\quad \forall a\in\mathbb{R}.$$

Evident acest fapt rămâne adevărat şi în situaţia în care avem un produs de mai mult de două matrici:

$$X(a_1)\cdot X(a_2)\cdot\ldots\cdot X\left(-\frac{1}{3}\right)=X\left(-\frac{1}{3}\right),\quad \forall a_1,a_2,\ldots\in\mathbb{R}.$$

Revenind la problemă, produsul din eununţ conţine între factori pe $X(-\frac{1}{3})$, deci este egal cu $X(-\frac{1}{3})$. Rămâne doar să mai observăm că din $X(-\frac{1}{3})=X(t)$ rezultă $t=\boxed{-\frac{1}{3}}$ (am folosit faptul că $A\neq O_2$).

5. Subiectul IV.

Rezolvare. În primul rând, de unde ştim că funcţia este definită corect pe $\mathbb{R}$? Pentru a ne convinge de acest fapt, observăm că numitorul fracţiei este un polinom de gradul doi fără rădăcini reale. Într-adevăr, discriminantul să este negativ: $\Delta=-3$.

(a) Cum $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ (f este funcţie raţională cu gradul numitorului mai mare decât gradul numărătorului), graficul lui f are către $+\infty$ asimptota orizontală $\boxed{y=0}$.

(b) $f'(x)=\dfrac{1\cdot(1+x+x^2)-(1+x)(1+2x)}{(1+x+x^2)^2}=\boxed{-\dfrac{2x+x^2}{1+x+x^2}}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

(c) $f(-2)=\boxed{-\dfrac{1}{3}}$, $f(0)=\boxed{1}$, $f'(-2)=f'(0)=\boxed{0}$.

(d) Folosim formula derivatei funcţiei f stabilită la punctul (b). Tabelul de mai jos oferă informaţiile necesare studiului monotoniei funcţiei f.

x	$-\infty$		-2		0		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Se vede de aici faptul că funcţia f are un minim global pentru $x=-2$ şi un maxim global pentru $x=0$. Deci $-\frac{1}{3}=f(-2)\leq f(x)\leq f(0)=1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

(e) Deoarece

- $\lim_{x\to\infty}\ln x=\infty$
- derivata $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ nu se anulează pe $(0,\infty)$
- există $\lim_{x\to\infty}\dfrac{F'(x)}{(\ln x)'}=\lim_{x\to\infty}xf(x)=\lim_{x\to\infty}\dfrac{x+x^2}{1+x+x^2}=1$

conform teoremei lui l'Hopital, limita din enunţ există şi are valoarea

$$\lim_{x\to\infty}\frac{F(x)}{\ln x}=\lim_{x\to\infty}\frac{F'(x)}{(\ln x)'}=\boxed{1}.$$

(f) Avem succesiv

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{x+1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx = \int_0^1 \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}dx + \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$$

▼[detalii]

În prima integrală substituim $y = x^2+x+1$, de unde $dy = (2x+1)\,dx$, sau $\left(x+\frac{1}{2}\right)dx = \frac{1}{2}dy$. În a doua integrală substituim $z = x+\frac{1}{2}$.

$$= \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{1}{y}dy + \frac{1}{2}\int_{1/2}^{3/2} \frac{1}{z^2+\frac{3}{4}}dz$$

$$= \frac{1}{2}\ln y\Big|_1^3 + \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\text{arctg}\,\frac{z}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Big|_{1/2}^{3/2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\text{arctg}\,\sqrt{3} - \text{arctg}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \boxed{\frac{\ln 3}{2} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}}.$$

(g) Printr-un calcul asemănător celui de la punctul precedent avem

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\,\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Atunci

$$\lim_{x\to\infty}\left(\int_o^x f(t)dt - \ln x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\ln\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} + \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \ln 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} = \boxed{\frac{\pi}{3\sqrt{3}}}$$

Pro Didactica vă urează succes la BAC.
De la toamnă vă aşteptăm cu întrebări din materia de facultate.