BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 30

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 30

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Valoarea maximă este $\sin\frac{\pi}{2} = \boxed{1}$. Celelalte valori nu au nici o importanţă, deoarece funcţia $\sin$ ia valori numai în intervalul $[-1, 1]$.

(b) Deoarece dreapta $y = \star$, indiferent de valoarea constantei $\star$, este paralelă cu axa Ox, o dreaptă perpendiculară este axa Oy, adică $\boxed{x = 0}$.

(c) $2x = \sqrt{2} \iff x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4} \in M$.

(d) Deoarece $0 = \sin\pi \in M$, produsul căutat este egal cu $\boxed{0}$.

(e) $|\cos\alpha + i\sin\alpha| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \boxed{1}$ indiferent de valoarea lui α.

(f) $\{\sin\pi = 0, \sin\frac{\pi}{2} = 1\} \subset M$. Suma celor două elemente este egală cu 1.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) $2 \perp \frac{3}{4} = 4\cdot 2\cdot\frac{3}{4} - 2\cdot 2 - 2\cdot\frac{3}{4} + \frac{3}{2} = \boxed{2}$.

(b) Din calculul precedent numărul $\frac{3}{4}$ este candidat la funcţia de element neutru. Avem

$$\begin{aligned} x \perp e = x \quad &\iff \quad 4xe - 2x - 2e + \frac{3}{2} = x \\ &\iff \quad (4e-3)x - 2e + \frac{3}{2} = 0 \end{aligned}$$

Relaţia de mai sus are loc pentru **toate** valorile posibile ale lui x dacă şi numai dacă $4e - 3 = -2e + \frac{3}{2} = 0$, adică $\boxed{e = \frac{3}{4}}$. Cum legea de compoziţie este comutativă avem automat şi $e \perp x = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

(c) Avem

$$\begin{aligned} a &= x \perp y - (2x-1)(2y-1) \\ &= 4xy - 2x - 2y + \frac{3}{2} - (4xy - 2x - 2y + 1) = \boxed{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

(d) În general, avem

$$\begin{aligned} x \perp y = \frac{1}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad 4xy - 2x - 2y + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (2x-1)(2y-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \text{ sau } y = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Aşadar $2^x \perp 4^x = \frac{1}{2}$ revine la $2^x = \frac{1}{2} = 2^{-1}$ sau $4^x = 2^{2t} = \frac{1}{2} = 2^{-1}$. Soluţiile ecuaţiei sunt $\boxed{x \in \{-1, -\frac{1}{2}\}}$.

(e) $\log_2 8 = \log_2 2^3 = \boxed{3}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare. Este util să observăm faptul că

$$f(x) = 1 + \frac{2}{x^2+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(a) Avem $\boxed{f'(x) = -\frac{4x}{(x^2+1)^2}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) Deoarece baza tinde la 1, iar exponentul la 0, limita este $1^0 = \boxed{1}$.

(c) Pentru derivata funcţiei f calculată mai sus, studiindu-i semnul găsim că

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & , x < 0 \\ < 0 & , x > 0 \end{cases}$$

aşadar **singurul** punct de extrem este punctul de maxim $\boxed{x = 0}$.

(d) Deoarece $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$, ecuaţia asimptotei căutate este $\boxed{y = 1}$.

(e)

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{2}{x^2+1}\right) dx = (x + 2\operatorname{arctg} x)\Big|_0^1 = \boxed{1 + \frac{\pi}{2}}$$

4. Subiectul III.

Rezolvare. Printr-un fenomen misterios în această problemă matricea unitate I_2 este notată cu E.

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 3 = \boxed{4}$.

(b) Pentru orice matrice pătratică $BB^* = (\det B)I_2$. Rezultă imediat $\boxed{r = 4}$.

(c) $B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}$.

(d) Propoziţia din enunţ se demonstrează în mod standard prin inducţie. Prezentăm o soluţie directă, ceva mai scurtă. Notând cu $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avem $A = 2I_2 + 3J$. Deoarece $J^k = O_2, \forall k \geq 2$ folosind formula binomului lui Newton rezultă

$$\begin{aligned} B^k &= (2I_2)^k + C_k^1 (2I_2)^{k-1} \cdot 3J + \underbrace{C_k^2 (2I_2)^{k-2} \cdot (3J)^2 + \ldots + (3J)^k}_{=O_2} \\ &= 2^k I_2 + 3k \cdot 2^{k-1} J = \boxed{\begin{pmatrix} 2^k & 3k \cdot 2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

(e) Avem $\det E = 1$, $E + E = 2I_2$ şi în final $\det(2I_2) = 4$.

(f) Pentru orice s avem $B + sB^* = \begin{pmatrix} 2+2s & 3-3s \\ 0 & 2+2s \end{pmatrix}$, deci $\det(B + sB^*) = (2+2s)^2$. Ecuaţia dată revine la $(2+2s)^2 = 4 \iff (s+1)^2 = 1 \iff \boxed{s \in \{0, -2\}}$.

(g) Deoarece $B^* = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, relaţia $uB + vB^* = 4E$, revine la

$$\begin{pmatrix} 2u+2v & 3u-3v \\ 0 & 2u+2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Din $3u - 3v = 0$, deducem $v = u$. Substituind în $2u + 2v = 4$, obţinem $2u + 2u = 4$, de unde $\boxed{u = v = 1}$.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Deoarece $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ avem $\boxed{f'(x) = \dfrac{1}{x^2}}$, $\forall x \in (0, \infty)$.

(b) Singura posibilă asimptotă verticală este dreapta de ecuaţie $\boxed{x = 0}$. Această dreaptă este într-adevăr asimptotă, deoarece $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = -\infty$.

(c) Studiem semnul derivatei a doua a funcţiei g. Avem $g'(x) = \dfrac{1}{x}$ şi deci $g''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$, $\forall x \in (0, \infty)$. Aşadar g este concavă pe $(0, \infty)$.

(d) Într-adevăr $f(x) + g'(x) = 1$, $\forall x \in (0, \infty)$. Deci $p = \boxed{1}$.

(e) Studiem semnul derivatei funcţiei h. Deoarece

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{1-x}{x^2} \begin{cases} > 0 & , 0 < x < 1 \\ < 0 & , x > 1 \end{cases}$$

funcţia h este strict crescătoare pe $(0, 1]$ respectiv strict descrescătoare pe $[1, \infty)$. Punctul $x = 1$ este **unicul** punct de extrem. Mai mult, $x = 1$ este punct de maxim global, iar valoarea maximă a funcţiei h este $\max h = h(1) = 0$. Nu ni s-a cerut acest fapt, însă îl vom folosi mai jos.

(f) Am văzut că $h(x) \leq 0$, $\forall x \in (0, \infty)$. Cu alte cuvinte

$$1 - \frac{1}{x} - \ln x \leq 0 \iff x \leq 1 + x \ln x, \quad \forall x \in (0, \infty)$$

(g) Folosind punctul (f) obţinem inegalitatea

$$\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}, \quad \forall x \in [1, 2].$$

Integrând-o pe intervalul $[1, 2]$ obţinem

$$\int_1^2 g(x)\, dx = \int_1^2 \ln x\, dx \geq \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx = (x - \ln x)\Big|_1^2 = 1 - \ln 2.$$