BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 26

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 26

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Două drepte sunt paralele dacă au aceaşi pantă. Panta dreptei $y = 4x$ este $m = 4$. O altă dreaptă cu această pantă este $\boxed{y = 4x + 2007}$.

(b) Cum $1^2 + (-\sqrt{3})^2 = 1 + 3 = 4$, punctul $A(1, -\sqrt{3})$ aparţine cercului de ecuaţie $x^2 + y^2 = 4$.

(c) Cu formula uzuală (teorema lui Pitagora) distanţa este

$$\sqrt{(-2-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{8} = \boxed{2\sqrt{2}}$$

(d) $\sin\frac{\pi}{6} = \boxed{\frac{1}{2}} \in \mathbb{Q}$.

(e) De exemplu, pentru $a = \arcsin 1 = \boxed{\frac{\pi}{2}}$ şi $b = \arccos 1 = \boxed{0}$, avem $\sin a = \cos b = 1$.

(f) $\sin^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{3\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = \boxed{1}$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Pentru $A = \boxed{\mathbb{R}}$, mulţimea $A \cup \{-1, 0, 1\} = \mathbb{R}$ are o infinitate de elemente.

(b) $4^x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4^x = 4^{-1} \Leftrightarrow x = \boxed{-1}$.

(c) Deoarece $3 < \log_2 y < 4 \Leftrightarrow 2^3 < y < 2^4 \Leftrightarrow 8 < y < 16$, valorile naturale pe care y le poate lua sunt $y \in \boxed{\{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}}$.

(d) Deoarece în Z_{11}, avem $\hat{3} \cdot \hat{4} = \widehat{12} = \hat{1}$, inversul lui $\hat{3}$ este $\boxed{\hat{4}}$.

(e) De exemplu, pentru $A = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}}$ avem $\det A = 2 \cdot 5 - 0 \cdot 0 = 10$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) Funcţia f fiind de gradul II, are un singur punct de extrem (care este global) în vârful parabolei asociate, adică pentru $x = \boxed{4}$.

(b) Derivata a doua este $g''(x) = 6(x-4)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Avem $g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$. Cum în $x = \boxed{4}$, derivata a doua g'' îşi schimbă semnul, acesta este un punct de inflexiune.

(c) Pentru $h(x) = \boxed{4}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, avem $\displaystyle\int_0^1 h(x)\,dx = 4$.

(d) Şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin $a_n = \boxed{4 + \frac{1}{n}}$, are limita 4.

(e) Avem $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{25n+24}{5n+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{25+\frac{24}{n}}{5+\frac{4}{n}} = \frac{25+0}{5+0} = \boxed{5}$.

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Matricile A şi B fiind triangulare superioare (toate elementele de sub diagonala principală sunt 0), determinantul lor este produsul elementelor de pe diagonală. Astfel $\det A = \boxed{0} \neq \boxed{1} = \det B$.

(b) $AB = A(I_3 + A) = A + A^2 = (I_3 + A)A = BA$

(c) Cum $\det A = 0$, rangul lui A este mai mic decât 3. Matricea A are minorul $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, de ordinul 2 cu determinantul nenul, deci rangul lui A este $\boxed{2}$.

(d) Pentru $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avem $CD = O_3$ şi $DC = C$, deci $CD \neq DC$.

(e) Prin calcul direct

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ A^3 &= O_3 \end{aligned}$$

(f) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix}$ matrice cu proprietatea $AX = XA$. Efectuând înmulţirile matriceale, egalitatea aceasta se traduce prin

$$\begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & j \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = e = j \\ b = f \\ d = g = h = 0 \end{cases}$$

Substituind e şi j prin a, f prin b, iar d, g şi h cu 0, obţinem că $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

(g) Am văzut la punctul (e) că $A^3 = O_3$ şi de asemenea forma lui A^2. Cum $A \cdot I_3 = I_3 \cdot A$, putem aplica formula binomului lui Newton. Folosind faptul că $A^3 = O_3$, rezultă că $A^m = O_3$, $\forall m \in \mathbb{N}, m \geq 3$. Atunci

$$\begin{aligned} B^n &= (I_3 + A)^n = I_3 + C_n^1 A + C_n^2 A^2 + C_n^3 A^3 + \ldots + C_n^n A^n \\ &= I_3 + nA + \frac{n(n-1)}{2} A^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

qed.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x > 0$ avem $f'(x) = \boxed{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}$.

(b) Conform definiţiei derivatei într-un punct, limita este $\boxed{f'(1) = \dfrac{1}{2}}$.

(c) Cum funcţia este definită doar la dreapta lui $x_0 = 0$, nu putem discuta de derivabilitate ci doar de derivabilitate la dreapta. Vom arăta că f nu este derivabilă la dreapta în $x_0 = 0$. Or aceasta este o consecinţă a faptului că

$$\lim_{x \to 0_+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0_+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0_+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$$

(d) Cum $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0, \ \forall x > 0$, rezultă că f este strict crescătoare pe $[0, \infty)$. De fapt $x \mapsto \sqrt{x}$ este evident strict crescătoare, dar am preferat să dăm un argument formal.

(e) Să observăm că funcţia $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) + f(x^2) + f(x^3) = \sqrt{x} + x + x\sqrt{x}$ este strict crescătoare ca sumă de funcţii strict crescătoare. Atunci h este în particular injectivă. Cum $h(4) = \sqrt{4} + \sqrt{4^2} + \sqrt{4^3} = 2 + 4 + 8 = 14$, rezultă că $x = \boxed{4}$ este o soluţie. Această soluţie este unică datorită injectivităţii lui g.

(f) $\displaystyle\int_1^4 f(x)\,dx = \int_1^4 x^{1/2}\,dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_1^4 = \frac{2(4^{3/2} - 1)}{3} = \boxed{\frac{14}{3}}$.

(g) Căutăm o funcţie de tipul $g(x) = kx$ astfel ca $\int_1^4 f(x)\,dx = \int_1^4 g(x)\,dx \Leftrightarrow \frac{14}{3} = k\int_1^4 x\,dx \Leftrightarrow \frac{14}{3} = k\frac{x^2}{2}\Big|_1^4 \Leftrightarrow \frac{14}{3} = k\frac{15}{2} \Leftrightarrow k = \frac{28}{45}$. Obţinem funcţia $g(x) = \boxed{\frac{28}{45}x}$ care satisface condiţiile din enunţ.

Pro Didactica vă urează succes la BAC.
De la toamnă vă aşteptăm cu întrebări din materia de facultate.