BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 25

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 25

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) **Prima soluţie.** Deoarece $12^2+5^2 = 13^2$, triunghiul respectiv este dreptunghic. Aria este atunci jumătate din produsul catetelor, adică $\frac{12 \cdot 5}{2} = \boxed{30}$.
A doua soluţie. Dacă nu observăm faptul că triunghiul din enunţ este dreptunghic, atunci folosim teorema lui Heron. Semiperimetrul triunghiului este $s = \frac{12+5+13}{2} = 15$, deci aria sa este $S = \sqrt{15 \cdot (15-12) \cdot (15-5) \cdot (15-13)} = \sqrt{900} = 30$.

(b) Cu formula distanţei (teorema lui Pitagora)

$$d(D,E) = \sqrt{(1-0)^2 + (-2-1)^2} = \boxed{\sqrt{10}}$$

(c) $|z| = |-1-4i| = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2} = \boxed{\sqrt{17}}$

(d) Determinăm $\overrightarrow{ML}(1-0, 2-(-1))$ şi $\overrightarrow{LN}(2-1, 5-2)$. Deoarece $\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{LN}$, punctele L, M, N sunt coliniare.

(e) Latura pătratului este $\sqrt{100} = 10$, deci perimetrul său este $4 \cdot 10 = \boxed{40}$.

(f) Dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci $\cos x > 0$ şi conform formulei fundamentale a trigonometriei, $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \boxed{\frac{\sqrt{15}}{4}}$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Din teorema lui Bezout, restul împărţirii polinomului f la polinomul $X-(-1)$ este

$$f(-1) = 2(-1)^3 - 4(-1)^2 + 5(-1) - 1 = \boxed{-12}.$$

(b) Funcţia exponenţială de bază supraunitară este strict crescătoare. Cum $2^3 = 8 < 10 < 2^4 = 16$, inegalitatea este verificată de exact 4 elemente din cele 5 ale mulţimii, anume $0, 1, 2, 3$. Probabilitatea este deci $\boxed{\frac{4}{5}}$.

(c) Deoarece $f(2) = 0$, avem $g(0) = \boxed{2}$. De fapt se poate arăta uşor că $g(x) = x + 2$, de unde obţinem tot $g(0) = 0 + 2$.

(d) Avem $\log_2(3x + 5) = 3 \Leftrightarrow 3x + 5 = 2^3 \Leftrightarrow 3x = 8 - 5 \Leftrightarrow x = \boxed{1}$.

(e) Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuaţiei. Atunci

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_1 &= 0 \\ x_2^3 + x_2 &= 0 \\ x_3^3 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Adunând aceste ecuaţii şi folosind prima relaţie a lui Viète, obţinem $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -(x_1 + x_2 + x_3) = -\frac{0}{1} = \boxed{0}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $f'(x) = \boxed{3x^2 + 1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) Cum $f'(x) \geq 1 > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, funcţia f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

(c) Din definiţia derivatei într-un punct, limita este $f'(-2) = 3(-2)^2 + 1 = \boxed{13}$.

(d) Ecuaţia se scrie $3x^2 + 1 = 4 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4-1}{3} = 1 \Leftrightarrow x \in \boxed{\{-1, 1\}}$.

(e) $\int_0^1 f(x)dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - 2007x\right)\Big|_0^1 = \boxed{-\frac{8025}{4}}$.

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Avem (trebuie să mai faceţi completări)

$$\begin{aligned} xy - \frac{1}{xy} - \left(x + y - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) &= (xy - y) - \left(\frac{1}{xy} - \frac{1}{y}\right) - \left(x - \frac{1}{x}\right) \\ &= (x-1)\left(y + \frac{1}{xy} - 1 - \frac{1}{x}\right) \\ &= (x-1)\left[(y-1) - \frac{1}{xy}(y-1)\right] \\ &= \frac{(x-1)(y-1)(xy-1)}{xy} \end{aligned}$$

(b) Luând $y = x^2$ în identitatea de la (a) ecuaţia poate fi scrisă $0 = x^3 - \frac{1}{x^3} - x - x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{(x-1)(x^2-1)(x^3-1)}{x^3}$ şi de aici se vede că soluţiile reale ale ecuaţiei sunt $x = \boxed{1}$ şi $x = \boxed{-1}$.

(c) Folosind iar (a) inegalitatea se poate scrie sub forma

$$\frac{(a-1)(b-1)(ab-1)}{ab} \geq 0$$

ceea ce este evident pentru $a, b \in [1, \infty)$.

(d) Procedăm prin inducţie:

Verificare. Pentru $n = 1$, inegalitatea se scrie $a_1 - \frac{1}{a_1} \geq a_1 - \frac{1}{a_1}$. Evident.

Pasul de inducţie. Presupunem că pentru orice $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [1, \infty)$ are loc inegalitatea

$$a_1 a_2 \ldots a_n - \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n} \geq a_1 + a_2 + \ldots a_n - \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} - \ldots - \frac{1}{a_n}$$

Pentru orice $a_{n+1} \in [1, \infty)$, luând $a = a_1 a_2 \ldots a_n$ şi $b = a_{n+1}$ în inegalitatea de la (c) şi apoi folosind ipoteza de inducţie, avem

$$\begin{aligned} a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1} - \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1}} &\geq a_1 a_2 \ldots a_n + a_{n+1} - \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \\ &\geq a_1 + a_2 + \ldots a_{n+1} - \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} - \ldots - \frac{1}{a_{n+1}}. \end{aligned}$$

Conform principiului inducţiei afirmaţia de la punctul (d) este demonstrată.

(e) In inegalitatea de la punctul (d), luând $n = 3$, $a_1 = 2^a$, $a_2 = 2^b$ şi $a_3 = 2^c$, obţinem exact cerinţa din enunţ.

(f) Inegalitatea se poate aranja sub forma $\frac{(x-y)(1+xy)}{xy} > 0$, sub care este evidentă.

Un argument alternativ constă în observaţia faptului că funcţia $u \mapsto u - \frac{1}{u}$ este strict crescătoare pe $(0, \infty)$ (derivata funcţiei în u este $1 + \frac{1}{u^2} > 0$, $\forall u \in (0, \infty)$).

(g) In inegalitatea de la (g) luăm $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$ şi obţinem exact inegalitatea dorită.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) $f_1(x) = \int_0^x f_0(t)dt = \int_0^x 1dt = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) $f_2(x) = \int_0^x f_1(t)dt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^x = \boxed{\frac{x^2}{2}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(c) Ecuaţia se scrie $x + \frac{x^2}{2} = 0$ şi are rădăcinile $x_1 = \boxed{0}$ şi $x_2 = \boxed{-2}$.

(d) Procedăm prin inducţie.

Verificare. Pentru $n = 1$ am văzut la (a) că $f_1(x) = \frac{x^1}{1!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Pasul de inducţie. Presupunem că $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Atunci

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)dt = \left.\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\right|_0^x = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Conform principiului inducţiei afirmaţia de la acest punct este demonstrată.

(e) In general, dacă $g(x) = \int_0^x h(t)dt$ atunci $g'(x) = h(x)$, deci acest punct rezultă direct din modul cum este definit şirul de funcţii.

(f) Folosind (d), avem $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f_3(x)}{f_2(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{6}}{\frac{x^2}{2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{3} = \boxed{\infty}$.

(g) Deoarece $f_n(1) = \frac{1^n}{n!} = \frac{1}{n!}$ satisface $0 < f_n(1) \leq \frac{1}{n}$, trecând la limită şi folosind criteriul cleştelui, obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1) = \boxed{0}$.