BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 24

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 24

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Produsul scalar este

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) = \boxed{0}.$$

(b) Avem $|DE| = \sqrt{(0-1)^2 + [1-(-2)]^2 + (2-3)^2} = \boxed{\sqrt{11}}$.

(c) Punctul $P(-4, 1)$ est pe hiperbolă, deoarece coordonatele sale îi verifică ecuaţia: $(-4)^2 - 4 \cdot 1^2 = 12$. Ecuaţia tangentei prin P la hiperbolă se obţine prin dedublare:

$$(-4) \cdot x - 4 \cdot 1 \cdot y = 12 \Leftrightarrow \boxed{x + y + 3 = 0}.$$

(d) Deoarece vectorii $\overrightarrow{LM} = (-1, 1)$ şi $\overrightarrow{MN} = (-1, 1)$ sunt paraleli (chiar egali), punctele L, M şi N sunt colineare. De fapt M este chiar mijlocul segmentului LN.

(e) Ştim că $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Alegând $\boxed{n = 3}$ rezultă $\sin\frac{3\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{2} = 1$. Evident, problema are o infinitate de soluţii.

(f) Punctele $A(1, 2)$ şi $B(2, 1)$ aparţin dreptei $x + ay + b = 0$ dacă şi numai dacă coordonatele lor satisfac ecuaţia dreptei. Obţinem sistemul

$$\begin{cases} 1 + 2a + b = 0 \\ 2 + a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2a + b = 0 \\ 1 - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + b = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} b = -3 \\ a = 1 \end{cases}}$$

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Suma din enunţ este suma primilor zece termeni ai unei progresii aritmetice cu primul termen $a_1 = 2$ şi ultimul termen egal cu 20. Prin urmare

$$2 + 4 + \ldots + 20 = \frac{10 \cdot (2 + 20)}{2} = \boxed{110}.$$

(b) Deoarece

$$\hat{3}\hat{x} = \begin{cases} \hat{0} & , \hat{x} \in \{\hat{2}, \hat{4}, \hat{6}\} \\ \hat{3} & , \hat{x} \in \{\hat{1}, \hat{3}, \hat{5}\} \end{cases},$$

probabilitatea cerută este $\boxed{p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}}$.

(c) Din definiţia funcţiei inverse (observăm că există, deşi nu ni se cere acest lucru) rezultă

$$g(1) = x \iff f(x) = 1 \iff 3x - 2 = 1 \iff \boxed{x = 1}.$$

(d) Amândoi logaritmii au argumentul pozitiv, indiferent de x. Cum funcţia $\log_2$ este injectivă ecuaţia devine

$$2x^2 + 7 = x^4 + 8 \iff x^4 - 2x^2 + 1 = 0.$$

Notând cu $t = x^2$ obţinem ecuaţia de gradul doi $t^2 - 2t + 1 = 0$, cu soluţia unică $t = 1$. Revenind la necunoscuta originală, din $t^2 = 1$ rezultă $\boxed{x \in \{-1, 1\}}$.

(e) **Prima soluţie.** Deoarece orice rădăcină α a polinomului satisface $\alpha^3 = \alpha$, conform relaţiilor lui Viète rezultă

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{0}{1} = \boxed{0}.$$

A doua soluţie. Polinomul f se rescrie $f = X(X - 1)(X + 1)$, aşadar are rădăcinile $\{0, 1, -1\}$. Suma cuburilor lor este, evident, zero.
Notă. Ideea primei soluţii se poate aplica în cazul general, chiar şi atunci când nu găsim factorizarea polinomului.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) Ni se cere să găsim o primitivă a funcţiei $x \mapsto x^2$. Alegem, de exemplu, $\boxed{f(x) = \frac{x^3}{3}}$.

(b) Nu putem scoate din mânecă o astfel de funcţie. O strategie viabilă este următoarea:

(1) Alegem la întâmplare o funcţie neconstantă h.

(2) Calculăm $I = \int_0^1 h(x)\,dx$, ţinând degetele încrucişate ca nu cumva să obţinem $I = 0$.

(3) Definim funcţia $g = \frac{2007}{I} h$, care este neconstantă deoarece h a fost aleasă neconstantă. Din proprietăţile de bază ale integralei avem $\int_0^1 g(x)\,dx = 2007$

Concret, fie $h(x) = x$. Atunci $I = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$. Luăm $\boxed{g(x) = 4014x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(c) O funcţie de două ori derivabilă este concavă pe $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă a doua derivată a sa este negativă pe $\mathbb{R}$. De exemplu, luăm $\boxed{h(x) = -x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Atunci $h''(x) = -2 < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(d) O funcţie derivabilă este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă derivata sa este mereu negativă (exceptând o mulţime de puncte izolate). Luăm de exemplu $\boxed{u = -2x}$ (adică h' cu notaţiile de la (c)).

(e) Dăm factor comun forţat pe n^2 atât la numărător cât şi la numitor. Limita devine

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n^2+n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1-0}{1+0+0} = \boxed{1}$$

4. Subiectul III

Rezolvare.

(a) E clar că $A \cdot A = A \cdot A$ şi $A \cdot I_2 = I_2 \cdot A$.

(b) Fie $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Atunci

$$AT = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Pe de altă parte

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

deci $TA \neq AT$, adică $T \notin G$.

(c) Avem

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i^2 & 0 \\ 0 & i^2 \end{pmatrix} = -I_2$$

(d) Deoarece am văzut că $A^2 = -I_2$ rezultă că $A^2X = XA^2 = -X$, $\forall X \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$.

(e) Fie $B = aI_2 + bA$. Avem

$$\begin{aligned} AB &= A(aI_2 + bA) = aA + bA^2 \\ BA &= (aI_2 + bA)A = aA + bA^2, \end{aligned}$$

deci într-adevăr $AB = BA$, adică $B \in G$.

(f) Fie $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in G$. Egalitatea $AY = YA$ se traduce concret în egalitatea de matrici

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} yi & xi \\ ti & zi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} zi & ti \\ xi & yi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ceea ce este echivalent cu $z = y$ şi $t = x$. Am obţinut $Y = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = xI_2 + (-yi)A$, q.e.d.

(g) Deoarece $\det A = 0 - i^2 = 1 \neq 0$, matricea A este inversabilă. Dar pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem $\det(A^n) = (\det A)^n = 1$, deci toate puterile lui A sunt inversabile. **Notă.** Matricile A^n se pot calcula concret. Ele iau valorile A, $-I_2$, $-A$, I_2 care se repetă la infinit. Am ignorat în mod deliberat acest fapt. Ideea din soluţia prezentată funcţionează întotdeauna în cazul general.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) $f'(x) = \boxed{\ln a - \frac{a}{x}}$, $\forall x \in (0, \infty)$.

(b) $\boxed{f(a) = 0}$ respectiv $\boxed{f'(a) = \ln a - 1}$.

(c) Am văzut adineaori că $f(a) = 0$. Ipoteza din enunţ se mai poate formula astfel: $x = a$ **este punct de minim pentru funcţia** f. Din teorema lui Fermat rezultă $f'(a) = 0$, adică $\ln a - 1 = 0$, sau $\boxed{a = e}$.

(d) Pentru $a = e$, cu notaţiile de mai sus, avem

$$f'(x) = 1 - \frac{e}{x} \begin{cases} > 0 & , x > e \\ < 0 & , x < e \end{cases}.$$

Prin urmare f este strict descrescătoare pe $(0, e]$ respectiv stric crescătoare pe $[e, \infty)$. Deci $x = e$ este punct de minim global pentru funcţia f, iar valoarea minimă este $\min f = f(e) = 0$. Inegalitatea $f(x) \geq f(e)$, $\forall x \in (0, \infty)$ se rescrie sub forma $x - e \ln x \geq 0$, sau $x \geq \ln(x^e)$, sau $e^x \geq x^e$, $\forall x \in (0, \infty)$, q.e.d.

(e) Integrând pe intervalul $[0, 1]$ inegalitatea de la (e) obţinem

$$\int_0^1 e^x \, dx \geq \int_0^1 x^e \, dx$$

Am folosit proprietatea de monotoniei a integralei definite.

(f) Să ne reamintim de funcţia $f(x) = x - e \ln x$ studiată mai sus. Avem $e^x = x^e \Leftrightarrow x = e \ln x \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(e)$. Deoarece f este strict crescătoare pe $[e, \infty)$ respectiv strict descrescătoare pe $(0, e]$ rezultă $x = e$, q.e.d.

(g) Deoarece inegalitatea din enunţ are loc pentro **orice** $x \in (0, \infty)$, în particular este satisfăcută şi de $x = e$. Avem

$$c^e + b^e \geq e^c + e^b \Leftrightarrow (e^c - c^e) + \left(e^b - b^e\right) \leq 0$$

Din punctul (d) ambele valori dintre paranteze sunt pozitive. Având suma negativă, ele sunt în mod necesar nule. Am obţinut $e^c - c^e = e^b - b^e = 0$, de unde, aplicând propoziţia demonstrată la (f) rezultă $\boxed{b = c = e}$. Încheiem observând că în acest caz inegalitatea este într-adevăr validă (fapt demonstrat mai sus):

$$e^x + e^x = 2e^x \geq 2x^e = x^e + x^e, \quad \forall x \in (0, \infty).$$