# BAC 2007

## Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 23

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

# Varianta 23

## 1. Subiectul I

**Rezolvare.**

(a) Deoarece $z = (1+i\sqrt{2})(1-i\sqrt{2}) = 1 + (\sqrt{2})^2 = 3$ rezultă $\boxed{\mathbf{Re}\, z = 3}$.

(b) Putem alege numărul $n = \boxed{2} > \sqrt{3} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$.

(c) Un exemplu este $\boxed{(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1^2}$.

(d) Mijlocul segmentului $AB$ este punctul $C\left(\frac{a+1}{2}, \frac{2+b}{2}\right)$. Din ipoteză ştim că punctul $C$ are coordonatele $(2,3)$, de unde obţinem $\frac{a+1}{2} = 2 \Leftrightarrow \boxed{a = 3}$ respectiv $\frac{2+b}{2} = 3 \Leftrightarrow \boxed{b = 4}$.

(e) $\begin{vmatrix} \sin\pi & \cos\pi \\ -\cos\pi & \sin\pi \end{vmatrix} = \sin^2\pi - (-\cos^2\pi) = \sin^2\pi + \cos^2\pi = \boxed{1}$.

(f) Pentru $x$ şi $y$ arbitrare avem

$$\det A = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \sin y & \cos y \end{vmatrix} = \sin x \cos y - \cos x \sin y = \sin(x-y)\,.$$

Pentru ca $A$ să fie de rang $2$ este necesar şi suficient ca $\det A \neq 0$. Putem alege (de exemplu) $x = \boxed{\frac{\pi}{2}}$ şi $y = \boxed{0}$, caz în care $\det A = 1 \neq 0$.

## 2. Subiectul II.1

**Rezolvare.**

(a) Dintr-un grup de $4$ elevi putem alege doi în $C_4^2 = \boxed{6}$ moduri distincte.

(b) Mijlocul segmentului $[2,4]$ este $a = 3$. Dacă $g$ este o funcţie pară arbitrară, atunci $f(x) = g(x-3)$ satisface condiţia cerută, deoarece $f(2) = g(-1) = g(1) = f(4)$. Aşadar, putem alege $g(x) = |x|$, caz în care obţinem exemplul

$$\boxed{f(x) = |x-3|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

(c) Pe de o parte,

$$2^m > \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^m > 2^{-2} \Leftrightarrow m > -2\,.$$

Pe de altă parte,

$$4^m < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2^{2m} < 2^{-1} \Leftrightarrow 2m < -1 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{2}\,.$$

Singurul număr întreg din intervalul $\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$ este $\boxed{m = -1}$.

(d) Suma rădăcinilor ecuaţiei de gradul doi $x^2 - 4x + 2007$ este egală cu $4$.

(e) E clar că $f(-1) = f(1) = 1$. De altfel, funcţia $f(x) = x^2$ este pară.

## 3. Subiectul II.2

**Rezolvare.**

(a) Verificăm prin calcul direct că

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{(x+2)-(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}, \quad \forall x \in [0, \infty).$$

(b) Folosind identitatea de la punctul precedent găsim

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{-(x+2)^2 + (x+1)^2}{(x+1)(x+2)} = \boxed{\frac{-2x+3}{(x+1)^2(x+2)^2}}, \forall x \in [0, \infty).$$

(c) Evident $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{1}{\infty} = \boxed{0}$.

(d) Din punctul precedent rezultă că $\boxed{y = 0}$ este asimptotă orizontală la graficul lui $f$ către $\infty$.

(e) Avem

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) dx \\ &= (\ln|x+1| - \ln|x+2|)\big|_0^1 \\ &= \ln 2 - \ln 3 - (\ln 1 - \ln 2) = \boxed{\ln\frac{4}{3}}. \end{aligned}$$

## 4. Subiectul III

**Rezolvare.** Ne vom simplifica în mod substanţial munca dacă considerăm funcţia $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $\phi(x) = 1 + x$. Evident $\phi$ este bijectivă şi în plus are proprietatea de morfism

$$\phi(x\Delta y) = 1 + x\Delta y = 1 + x + y + xy = (1+x)(1+y) = \phi(x)\phi(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Inversa ei este dată de $\phi^{-1}(y) = y - 1$, $\forall y \in \mathbb{R}$.

(a) Fie $x, y \in A = (-1, \infty)$. Atunci $\phi(x) = 1 + x > 0$ şi $\phi(y) = 1 + y > 0$, deci

$$z = \phi(x\Delta y) = \phi(x)\phi(y) > 0.$$

Prin urmare $x\Delta y = \phi^{-1}(z) = z - 1 \in (-1, \infty) = A$, q.e.d.

(b) Deoarece $\phi$ este izomorfism de la $(\mathbb{R}, \Delta)$ la $(\mathbb{R}, \cdot)$ rezultă că $\Delta$ are aceleaşi proprietăţi ca şi înmulţirea obişnuită a numerelor reale, deci este comutativă şi asociativă.

(c) Deoarece $1$ este elementul neutru faţă de în mulţirea obişnuită, elementul $e = \phi^{-1}(1) = \boxed{0}$ este elementul neutru al legii $\Delta$. Într-adevăr,

$$x\Delta 0 = 0\Delta x = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(d) Restricţia morfismului $\phi$ la mulţimea $A$ are imaginea tocmai $(0, \infty)$, care este grup în raport cu operaţia de înmulţire. Prin urmare $(A, \Delta)$ este un grup izomorf cu $((0, \infty), \cdot)$. Pentru orice $x \in A$, simetricul său este dat de formula

$$x' = \phi^{-1}\left(\frac{1}{\phi(x)}\right) = \boxed{\frac{1}{x+1} - 1}.$$

(e) Avem

$$x\Delta x = 3 \iff \phi(x\Delta x) = \phi(3) \iff \phi(x)^2 = 4.$$

Deoarece $x > -1 \iff \phi(x) > 0$ obţinem $\phi(x) = 2 \iff x = 2 - 1 = \boxed{1}$.

(f) Deoarece $\Delta$ este comutativă, avem

$$b\Delta x = b,\ \forall x \in \mathbb{R} \iff \phi(b)\phi(x) = \phi(b),\ \forall x \in \mathbb{R} \iff \phi(b)\left[\phi(x) - 1\right] = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Deoarece $\phi$ ia cel puţin două valori (de fapt, o infinitate), ultima identitate este echivalentă cu $\phi(b) = 0 \iff \boxed{b = -1}$.

(g) Folosind din nou morfismul $\phi$, avem

$$\phi(H) = \phi(-2007) \cdot \ldots \cdot \phi(-2) \cdot \underbrace{\phi(-1)}_{=0} \cdot \phi(0) \cdot \ldots \cdot \phi(2007) = 0.$$

Aşadar $\phi(H) = 0 \iff \boxed{H = -1}$.

## 5. Subiectul IV

**Rezolvare.** Funcţia $f$ mai poate fi scrisă şi sub forma

$$f(x) = xe^{-x} + e^{-x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(a) Avem

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} - e^{-x} = \boxed{-xe^{-x}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(b) Din formula obţinută mai sus constatăm că

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & , x \in (-\infty, 0) \\ < 0 & , x \in (0, \infty) \end{cases}.$$

Fiind şi continuă, funcţia $f$ este strict crescătoare pe $(-\infty, 0]$ respectiv strict descrescătoare pe $[0, \infty)$. Prin urmare $\boxed{x = 0}$ este punct de maxim global.

(c) Având o nedeterminare de tipul $\frac{\infty}{\infty}$, folosim regula lui l'Hopital pentru calculul limitei

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0\,.$$

Aşadar dreapta de ecuaţie $\boxed{y = 0}$ este asimptotă orizontală către $\infty$ la graficul lui $f$.

(d) Deoarece am văzut că $f$ este strict descrescătoare pe $[0,\infty)$, folosind şi limita de la punctul recedent, pentru orice $x \in [0,\infty)$ avem

$$1 = f(0) \geq f(x) > \lim_{x\to\infty} f(x) = 0\,.$$

(e) Avem şirul de inegalităţi echivalente:

$$y + \frac{1}{y} \geq 2 \;\Leftrightarrow\; y - 2 + \frac{1}{y} \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \left(\sqrt{y} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2 \geq 0\,.$$

Ultima inegalitate este trivială.

(f) Examinând mai îndeaproape formula derivatei de la punctul (a), observăm că $f(x) = e^{-x} - f'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Folosind şi teorema Leibnitz–Newton, rezultă

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 e^{-x}\,dx - \int_0^1 f'(x)\,dx = -e^{-x}\Big|_0^1 - f(x)\Big|_0^1 = \boxed{2 - \frac{3}{e}}\,.$$

(g) Folosind inegalitatea de la punctul (e), obţinem

$$\frac{e^x}{x+1} + f(x) = \frac{1}{f(x)} + f(x) \geq 2, \quad \forall x \in [0,1]\,.$$

Integrând ultima inegalitate pe intervalul $[0,1]$ (folosind deci monotonia integralei) rezultă

$$\int_0^1 \frac{e^x}{x+1}\,dx + \underbrace{\int_0^1 f(x)\,dx}_{=2-\frac{3}{e}} \geq \int_0^1 2\,dx = 2\,,$$

de unde

$$\int_0^1 \frac{e^x}{x+1}\,dx \geq \frac{3}{e}\,,$$

q.e.d.

PRO DIDACTICA VĂ UREAZĂ SUCCES LA BAC.
DE LA TOAMNĂ VĂ AŞTEPTĂM CU ÎNTREBĂRI DIN MATERIA DE FACULTATE.