BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 22

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 22

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Conjugatul este $\boxed{-1+3i}$.

(b) Cu formula uzuală (teorema lui Pitagora),

$$AC = \sqrt{(3+1)^2+(4-2)^2} = \sqrt{16+4} = \boxed{\sqrt{20} = 2\sqrt{5}}$$

(c) Calculăm lungimile celorlalte laturi

$$BC = \sqrt{(7+1)^2+(-4-2)^2} = \sqrt{64+36} = 10$$
$$AB = \sqrt{(3-7)^2+(4+4)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80}$$

Cum $BC^2 = AB^2 + AC^2$, conform reciprocei teoremei lui Pitagora, triunghiul ABC este dreptunghic cu ipotenuza BC.

(d) Cum triunghiul este dreptunghic de catete AB şi AC, avem

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{20}\cdot\sqrt{80} = \boxed{20}$$

(e) Impunând condiţia ca B şi C să aparţină dreptei (coordonatele satisfac ecuaţia dreptei) obţinem $7-4m+n=0$ şi $-1+2m+n=0$, de unde rezultă

$$\boxed{m = \frac{4}{3}, n = -\frac{5}{3}}$$

(f) Cum triunghiul este dreptunghic, lungimea razei cercului circumscris este jumătate din lungimea ipotenuzei, adică

$$\frac{BC}{2} = \boxed{5}$$

2. Subiectul II.1

Rezolvare.

(a) Ecuaţia se scrie

$$(5^2)^{2x+1} = 5^{2007} \Leftrightarrow 5^{4x+2} = 5^{2007} \Leftrightarrow 4x+2 = 2007 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{2005}{4}}$$

(b) Observăm că avem de-a face cu 10 termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice de prim termen 7 şi raţie 10. Suma va fi

$$\frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{7 + 97}{2} \cdot 10 = \boxed{520}$$

(c) Verificăm dacă fiecare din cele 6 numere satiosface condiţia: $4 \cdot 0^2 \geq 4 \cdot 0 + 3$ (F), $4 \cdot 1^2 \geq 4 \cdot 1 + 3$ (F), $4 \cdot 2^2 \geq 4 \cdot 2 + 3$ (A), $4 \cdot 3^2 \geq 4 \cdot 3 + 3$ (A), $4 \cdot 4^2 \geq 4 \cdot 4 + 3$ (A), $4 \cdot 5^2 \geq 4 \cdot 5 + 3$ (A). Probabilitatea este deci $\frac{4}{6}$ adică

$$\boxed{\frac{2}{3}}$$

(d) Avem $(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(1) = \boxed{1}$.

(e) Deoarece $A_5^3 = \frac{5!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$. Obţinem $x \leq \dfrac{300}{60} = 5$, adică

$$\boxed{x \in (-\infty, 5]}$$

3. Subiectul II.2

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 2007}} = \boxed{\frac{x}{\sqrt{x^2 + 2007}}}$$

(b) Limita cerută este $f'(3) = \dfrac{3}{\sqrt{3^2 + 2007}} = \dfrac{3}{\sqrt{9(1 + 223)}}$ adică

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{224}} = \frac{1}{4\sqrt{14}}}$$

(c)

$$\int_0^1 f^2(x)\, dx = \int_0^1 (x^2 + 2007)\, dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2007x\right)\Bigg|_0^1 = \boxed{\frac{6022}{3}}$$

(d) Aflăm punctul critic: $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. Derivata f' schimbă semnul în acest punct, deci punctul corespunzător la $\boxed{x = 0}$ este de extrem local.

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{2007} \cdot f(0)}{f(0) + n^{2007}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(0)}{\frac{f(0)}{n^{2007}} + 1} = \dfrac{f(0)}{0 + 1} = \boxed{\sqrt{2007} = 3\sqrt{223}}$

4. Subiectul III.

Rezolvare. Vom nota $X(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Atunci $G = \{X(a,b) | a, b \in \mathbb{Z}\}$.

(a) Avem $M = X(3,4) \in G$ şi $I_2 = X(1,0) \in G$.

(b) Fie $A, B \in G$. Există atunci $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$ astfel încât

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}$$

şi

$$B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix}$$

Vrem să arătăm că $AB \in G$, adică există $a_3, b_3 \in \mathbb{Z}$ astfel încât

$$AB = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ -b_3 & a_3 \end{pmatrix}$$

Dar

$$AB = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & a_1b_2 + b_1a_2 \\ -b_1a_2 - a_1b_2 & -b_1b_2 + a_1a_2 \end{pmatrix}$$

Vom lua atunci

$$a_3 = a_1a_2 - b_1b_2 \in \mathbb{Z}$$

$$b_3 = a_1b_2 + a_2b_1 \in \mathbb{Z}$$

(c) Avem $\det(M) = 9 + 16 = \boxed{25}$.

(d) Vom lucra cu matricile de la punctul (b). Avem

$$\det(A) = a_1^2 + b_1^2$$

$$\det(B) = a_2^2 + b_2^2$$

$$\det(AB) = a_3^2 + b_3^2$$

Dar

$$\begin{aligned} \det(AB) &= a_3^2 + b_3^2 = (a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2 \\ &= a_1^2a_2^2 + b_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + 2a_1b_2a_2b_1 \\ &= (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = \det(A)\det(B) \end{aligned}$$

(e) Fie $X \in G$, $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Conform calculului de la (b), ecuaţia $X^2 = M$ se scrie

$$\begin{pmatrix} a^2 - b^2 & 2ab \\ -2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Obţinem $a^2 - b^2 = 3$ şi $2ab = 4$. Din a doua ecuaţie, avem $b = \frac{2}{a}$. Substituim în prima ecuaţie care după aducerea la acelaşi numitor devine $a^4 - 3a^2 - 4 = 0$. Pentru a rezolva această ecuaţie bipătratică, notăm $t = a^2$ şi obţinem $t^2 - 3t - 4 = 0$. Deducem $t_1 = -1$ şi $t_2 = 4$. Revenind la variabila a observăm că este imposibil să avem $a^2 = t_1 = -1 < 0$, deci $a^2 = t_2 = 4$. Astfel $a_1 = 2$ şi $a_2 = -2$, iar de aici $b_1 = \frac{2}{a_1} = 1$, $b_2 = \frac{2}{a_2} = -1$. Deci matricele căutate sunt $X_1 = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}$ şi $X_2 = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}$.

(f) Fie $A = \boxed{M^7}$. Atunci folosind punctul (d) urmat de (c) avem $\det(A) = \det(M^7) = (\det(M))^7 = 25^7$.

(g) Presupunem că există $A \in G$ astfel încât $\det(A) = 7$. Dacă A este de forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{Z}$$

va rezulta că $a^2 + b^2 = 7$, adică suma a două numere naturale pătrate perfecte este 7, fapt imposibil. ▼[detalii]

Primele pătratele perfecte sunt $0, 1, 4, 9, 16, \ldots$. Se observă că nu există două dintre acestea care adunate să dea 7.

5. Subiectul IV

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $f'(x) = \boxed{1 + e^x}$.

(b) Cum $f'(x) > 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ este strict crescătoare.

(c) Limita cerută este $f'(0) = \boxed{2}$.

(d)

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (x + e^x)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + e^x\right)\Bigg|_0^1 = \boxed{e - \frac{1}{2}}$$

(e) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty + \infty = \boxed{\infty}$

(f) Vom demonstra inegalitatea cerută pe $\mathbb{R}$. Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = e^x - x - 1$$

Avem $g'(x) = e^x - 1$ şi punctele critice sunt date de $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Avem $g'(x) < 0$ pentru $x < 0$ şi $g'(x) > 0$ pentru $x > 0$, deci $x = 0$ este punct de minim global. Rezultă $g(x) \geq g(0) = 0$ pentru orice x real, adică $e^x \geq x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

(g) Pe intervalul $[0, 1]$ avem

$$x + e^x \geq 2x + 1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{x + e^x} \leq \frac{1}{2x + 1}$$

Integrând de la 0 la 1 şi folosind monotonia integralei, obţinem

$$\int_0^1 \frac{1}{x+e^x}\,dx \le \int_0^1 \frac{1}{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|2x+1|\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 3 = \ln\sqrt{3}$$