# BAC 2007

# Pro–Didactica

## Programa M1–2

## Rezolvarea variantei 20

## versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

# Varianta 20

## 1. Subiectul I.

**Rezolvare.**

(a) Cu formula uzuală (teorema lui Pitagora) distanţa este

$$\sqrt{(4-1)^2+(-1-3)^2} = \sqrt{3^2+4^2} = \boxed{5}$$

(b) Panta dreptei $x+y=0 \Leftrightarrow y=-x$ este $m=-1$. Ecuaţia paralelei prin punctul $A(1,3)$ la $y=-x$ este

$$\boxed{y-3=-1\cdot(x-1) \Leftrightarrow y+x-4=0}$$

(c) $\boxed{(x-1)^2+(y-3)^2=1^2}$

(d) Cum $AB^2+AC^2=BC^2$, conform reciprocei teoremei lui Pitagora, triunghiul $ABC$ este dreptunghic. Atunci aria este dată de $\dfrac{AB\cdot AC}{2}=\dfrac{3\cdot 4}{2}=\boxed{6}$.

(e) Deoarece $0<\dfrac{3\pi}{7}<\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{5\pi}{7}<\pi$, avem $\cos\dfrac{3\pi}{7}>0>\cos\dfrac{5\pi}{7}$, deci $\boxed{a>b}$.

(f) Folosind faptul că funcţia sinus este impară şi periodică de perioadă principală $2\pi$, avem

$$\sin\frac{31\pi}{4}=\sin\left(8\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=\boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

## 2. Subiectul II.1.

**Rezolvare.**

(a) Numerele de $3$ cifre distincte pe care le putem forma cu cifrele $2,4,6$ sunt în număr de $3!=\boxed{6}$. Mai exact putem forma numerele $246$, $264$, $426$, $462$, $624$, $642$.

(b) O mulţime de $n$ elemente are $2^n$ submulţimi. Mulţimea cu $4$ elemente dată va avea deci $2^4=\boxed{16}$ submulţimi.

(c) Cum $x^2+3>0$, condiţia de existenţă este $x\in\mathbb{R}$. Avem $\log_2(x^2+3)=2 \Leftrightarrow x^2+3=2^2 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$. Suma soluţiilor este atunci $-1+1=\boxed{0}$.

(d) Avem suma primilor $10$ termeni ai unei progresii aritmetice cu $a_1 = 1$ şi $a_{10} = 37$, sumă care cu formula uzuală este $\frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = \boxed{190}$.

(e) Conform primei relaţii a lui Viète, $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{2}{1} = \boxed{-2}$.

## 3. Subiectul II.2.

**Rezolvare.**

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $f'(x) = \boxed{1 + \cos x}$.

(b) Cu regula lui l'Hopital (caz de nedeterminare $\frac{0}{0}$), avem

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + \cos x}{1} = \boxed{2}$$

(c) Cum funcţia sinus este mărginită, observăm că $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$. Atunci

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = \boxed{1}.$$

(d) $\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \cos x\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} - \cos\pi + \cos 0 = \boxed{\frac{\pi^2}{2} + 2}$

(e) $\lim_{n\to f} \left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \sin\frac{1}{n}\right) = 0 + \sin 0 = \boxed{0}$

## 4. Subiectul III.

**Rezolvare.**

(a) $\det A = 1 \cdot 6 - 2 \cdot 3 = \boxed{0}$. Atunci rangul lui $A$ nu are valoarea maximă $2$. Cum $A$ conţine elemente nenule, rangul său este cel puţin $1$. In concluzie $\operatorname{rang} A = \boxed{1}$.

(b)

$$\begin{aligned} C &= AB - BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -7 & 7 \\ -21 & 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -27 & 9 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

(c) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 21 & 42 \end{pmatrix} = 7A}$

(d) Evident $x_1 = 1$. Am văzut la punctul precedent că $A^2 = 7A$, deci $x_2 = 7$. Demonstrăm prin inducţie că $A^n = 7^{n-1}A$. Verificare a fost deja făcută pentru $n = 1$ şi $n = 2$. Presupunem că $A^n = 7^{n-1}A$. Atunci $A^{n+1} = A^n \cdot A = 7^{n-1}A \cdot A =$

$7^{n-1}A^2 = 7^{n-1}\cdot 7A = 7^nA$. Conform principiului inducţiei $A^n = 7^{n-1}A$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

(e) Determinăm matricele $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $AX = B$. Egalitatea aceasta de matrice se traduce prin

$$\begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 3(x+2z) & 3(y+2t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2z & = & -1 \\ y+2t & = & 1 \end{cases}$$

Rezultă de aici că $G = \left\{ \begin{pmatrix} -1-2z & 1-2t \\ z & t \end{pmatrix} \mid z, t \in \mathbb{R} \right\}$, deci $G$ are o infinitate de elemente.

(f) Căutăm o matrice $Y = \begin{pmatrix} -1-2z & 1-2t \\ z & t \end{pmatrix} \in G$ astfel încât

$$Y^2 + Y = O_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3z+4z^2-2zt & 3t-2z+4zt-2t^2 \\ -2z^2+tz & z-2tz+t^2+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se vede imediat că $z = t = 0$ satisfac ecuaţiile (nu trebuie să aflăm toate valorile posibile ci să arătăm că există una), deci $Y = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$ satisface condiţiile din enunţ.

(g) Am văzut la punctul (c) că $A^2 = 7A$, relaţie ce mai poate fi scrisă $A(A-7I_2) = (A-7I_2)A = O_2$. Luăm $D = \boxed{A-7I_2} \neq O_2$.

## 5. Subiectul IV.

**Rezolvare.**

(a) Pentru orice $x > 0$ avem

$$f'(x) = 1\cdot \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \boxed{\ln x + 1 = g(x)}$$
$$g'(x) = \boxed{\frac{1}{x}}$$

(b) Aflăm punctele critice ale lui $f$ rezolvând ecuaţia $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$. Pentru $x < \frac{1}{e}$, avem $f'(x) < 0$ şi pentru $x > \frac{1}{e}$ avem $f'(x) > 0$. Deci $x = \boxed{\frac{1}{e}}$ este singurul punct de extrem al lui $f$. Mai exact, acesta este un punct de minim global.

(c) Deoarece $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$, $\forall x > 0$, funcţia $f$ este convexă pe $(0, \infty)$. De asemenea, cum $g''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, $\forall x > 0$, rezultă că $f$ este concavă pe $(0, \infty)$.

(d) Am văzut la punctul (b) că $x = \frac{1}{e}$ este punct de minim global al lui $f$. Atunci pentru orice $x > 0$ avem $f(x) \geq f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e} \Leftrightarrow 1 + ex\ln x \geq 0$.

(e) Deoarece $\lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0_+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0_+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0_+}(-x) = 0$ şi $f$ este continuă pe $(0,\infty)$, graficul funcţiei $f$ nu are asimptote verticale.

Cum $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, graficul lui $f$ nu are nici asimptote orizontale.

Căutăm asimptotele oblice, care trebuiesc să fie de forma $y = mx + n$. Deoarece $m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$, graficul lui $f$ nu are nici asimptote oblice.

(f) Integrăm prin părţi

$$\begin{aligned}\int_1^e f(x)\,dx &= \int_1^e \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot \ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{e^2+1}{4}}\end{aligned}$$

(g) Fie $G$ o primitivă a lui $g$. Cum $G'(x) = g(x) \geq 1 > 0$ pentru $x > 1$, rezultă că $G$ este strict crescătoare pe intervalul $[1,\infty)$. In consecinţă $G(2007) > G(2006)$.

Pro Didactica vă urează succes la BAC.
De la toamnă vă aşteptăm cu întrebări din materia de facultate.