BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 19

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 19

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Pentru ca cele două drepte să fie paralele este necesar şi suficient ca coeficienţii variabilelor x şi y din ecuaţiile lor carteziene să fie proporţionali. In cazul de faţă aceasta revine la $\frac{2}{1} = \frac{a}{1}$, sau $a = \boxed{2}$.

(b) Un poligon convex cu n laturi are $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonale. In cazul de faţă obţinem $\frac{8 \cdot (8-3)}{2} = \boxed{20}$ diagonale.

(c) Folosind formula sumei unei progresii geometrice de raţie i precum şi faptul că $i^{11} = i^8 \cdot i^3 = i^3$, avem

$$z = i + i^2 + \ldots + i^{11} = i \cdot \frac{i^{11} - 1}{i - 1} = i \cdot \frac{i^3 - 1}{i - 1} = \frac{i(-i-1)}{i-1} = \frac{1-i}{i-1} = -1\,.$$

Deci modulul lui z este $|-1| = \boxed{1}$.

(d) Ecuaţia cercului se scrie $x^2 + (y-1)^2 = 2^2$, deci raza este $\boxed{2}$.

(e) $\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{5\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{0}$.

(f) Ecuaţia se scrie $\sin x = \sin\frac{\pi}{3}$. In intervalul $[0, \pi]$ există două soluţii, anume $\boxed{x \in \{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\}}$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Cum $f(x) = (x-1)^2 + 2$, valoarea minimă este $\boxed{2}$.

(b) Deoarece a este rădăcină a ecuaţiei $f(x) = 0$, avem $f(a) = a^2 - 2a + 3 = 0$, ceea ce se mai poate scrie $3 = 2a - a^2$. La fel se arată şi că $3 = 2b - b^2$. Atunci $\frac{1}{2a - a^2} + \frac{1}{2b - b^2} = \boxed{\frac{2}{3}}$.

(c) Notăm $x = 3^y$. Rezolvăm ecuaţia $f(x) = 6$, sau $x^2 - 2x - 3 = 0$. Rădăcinile sunt $x_1 = -1$ şi $x_2 = 3$. Ecuaţia $3^y = x_1 = -1$ nu are soluţii reale, iar ecuaţia $3^y = 3 = 3^1$ are soluţia $y = \boxed{1}$.

(d) Notăm $u = \log_2 t$. Ecuaţia devine $f(u) = 11$, sau $u^2 - 2u - 8 = 0$. Rădăcinile acestei ecuaţii sunt $u_1 = -2$ şi $u_2 = 4$. Din $\log_2 t = u_1 = -2$, obţinem $t_1 = 2^{-2}$, iar din $\log_2 t = u_2 = 4$, obţinem $t_2 = 2^4$. Atunci $t_1 t_2 = 2^{-2} 2^4 = 2^2 = \boxed{4}$.

(e) Avem $\begin{vmatrix} 3a & 2b \\ a & b \end{vmatrix} = 3ab - 2ab = ab$. Conform relaţiilor lui Viète, $ab = \frac{3}{1} = \boxed{3} \in \mathbb{N}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) $f'(x) = \boxed{-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) Inecuaţia se poate scrie $\dfrac{1}{x^2+1} \leq \dfrac{1}{2x} \Leftrightarrow 0 \leq \dfrac{x^2+1-2x}{2x(x^2+1)} \Leftrightarrow 0 \leq \dfrac{(x-1)^2}{2x(x^2+1)}$. Cum $(x-1)^2 \geq 0$ şi $x^2+1 > 0$, inecuaţia este echivalentă cu $x > 0$. Deci $x \in \boxed{(0,\infty)}$.

(c) Cum $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2+1} = 0$, graficul lui f are asimptota orizontală $\boxed{y=0}$ către ∞.

(d) Avem $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 f(n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{n^2}} = \dfrac{1}{1+0} = \boxed{1}$.

(e) $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - 0 = \boxed{\frac{\pi}{4}}$.

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ două matrici arbitrare din $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. Avem atunci $A + B = \begin{pmatrix} a+\alpha & b+\beta \\ c+\gamma & d+\delta \end{pmatrix}$, deci

$$\operatorname{tr}(A+B) = a + \alpha + d + \delta = (a+d) + (\alpha+\delta) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B).$$

(b) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. Prin calcul direct avem

$$\begin{aligned} A^2 - \operatorname{tr}(A)A + (\det A)I_2 &= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2. \end{aligned}$$

(c) Matricea $X = \boxed{\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică $\det X = 5 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0$ şi pe de altă parte $\operatorname{tr}(A) = 5 + 0 = 5$.

(d) Procedăm prin inducţie.

Verificarea: Folosind identitatea de la (b), avem $Y^2 - 5Y = O_2$, sau $Y^2 = 5Y$.

Presupunem că $Y^n = 5^{n-1}Y$. Atunci $Y^{n+1} = Y^n \cdot Y = 5^{n-1}Y \cdot Y = 5^{n-1}Y^2 = 5^{n-1} \cdot 5Y = 5^n Y$. Conform principiului inducţiei, afirmaţia este demonstrată.

(e) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ două matrici arbitrare din $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. Avem $AB = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}$, deci

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= (a\alpha + b\gamma)(c\beta + d\delta) - (c\alpha + d\gamma)(a\beta + b\delta) \\
&= ac\alpha\beta + bc\gamma\beta + ad\alpha\delta + bd\gamma\delta - ac\alpha\beta - bc\alpha\delta - ad\beta\gamma - bd\gamma\delta \\
&= ad\alpha\delta - bc\alpha\delta - (ad\beta\delta - bc\beta\gamma) = (ad - bc)(\alpha\delta - \beta\gamma) \\
&= (\det A)(\det B)\,.
\end{aligned}$$

(f) De exemplu $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ satisfac $\det X = \det Y = 0$ şi $\mathrm{tr}\,(X) = \mathrm{tr}\,(Y) = 0$. Conform (b), avem $X^2 = Y^2 = O_2$.

(g) Fie $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $X^2 = O_2$. Atunci conform (e), $(\det X)^2 = \det(X^2) = \det O_2 = 0$, deci $\det X = 0$. Folosind (b) avem $X^2 - \mathrm{tr}\,(X)X = O_2$, de unde $\mathrm{tr}\,(X) \cdot X = O_2$. Distingem cazurile:

- $\mathrm{tr}\,(X) = 0$
- $X = O_2 \Rightarrow \mathrm{tr}\,(X) = 0$

şi vedem că $\mathrm{tr}\,(X) = 0$. La fel din $Y^2 = O_2$, deducem $\mathrm{tr}\,(Y) = 0$. Atunci conform (a), $\mathrm{tr}\,(X + Y) = \mathrm{tr}\,(X) + \mathrm{tr}\,(Y) = 0 + 0 = 0$, qed.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Cum $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} + \cos x - 2$, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, avem $f(0) = f'(0) = \boxed{0}$.

(b) Avem $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$, evident.

(c) Pentru $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, avem $\cos x \in (0, 1]$, deci $\cos x \geq \cos^2 x$.

(d) Fie $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Folosind (c) şi apoi (b), $\dfrac{1}{\cos^2 x} + \cos x \geq \dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{\cos^2 x}{1} \geq 2$. Atunci conform calculului de la (a), $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} + \cos x - 2 \geq 2 - 2 = 0$. Având derivata pozitivă pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, funcţia f este crescătoare.

(e) Funcţia f fiind crescătoare pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, avem $f(x) \geq f(0) = 0$ pentru orice $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(f) Prin calcul direct $g'(x) = -\sin x + \dfrac{-\sin x}{\cos x} + 2x = -f(x)$.

(g) Conform (e), $g'(x) = -f(x) \leq 0$, deci funcţia g este descrescătoare pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(h) Folosind punctul precedent avem $g(x) \leq g(0) = 1$, pentru orice $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. De aici, $\cos x + \ln(\cos x) \leq 1 - x^2$, pentru orice $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Cum $1 \leq \frac{\pi}{2}$ putem integra inegalitatea precedentă de la 0 la 1 şi obţinem

$$\int_0^1 (\cos x + \ln(\cos x))dx \leq \int_0^1 (1 - x^2)dx = \frac{2}{3},$$

q.e.d.