BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 18

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

18

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Coordonatele mijlocului segmentului AB sunt

$$\left(\frac{1+4}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) = \boxed{\left(\frac{5}{2}, 1\right)}$$

(b) Fie $A'(x,y)$ simetricul punctului $A(1,-1)$ faţă de $B(4,3)$. Atunci punctul B este mijlocul segmentului AA', deci are coordonatele $\left(\frac{1+x}{2}, \frac{-1+y}{2}\right)$. Obţinem ecuaţiile $\frac{1+x}{2} = 4$ şi $\frac{-1+y}{2} = 3$, cu soluţiile $x = y = 7$. Punctul căutat este aşadar $\boxed{A'(7,7)}$.

(c) $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{4}}$.

(d) Rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} x - 3y + 6 = 0 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3x + 6 = 0 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 6 = 0 \\ x = y \end{cases}.$$

Punctul de intersecţie căutat este $\boxed{(3,3)}$.

(e) $x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4 \Leftrightarrow \boxed{x \in \{2i, -2i\}}$.

(f) Avem

$$z = \frac{2+3i}{(2-i)^2} = \frac{2+3i}{3-4i} = \frac{(2+3i)(3+4i)}{3^2+4^2} = \frac{-6+17i}{25}.$$

Partea reală este $\boxed{\operatorname{Re} z = -\frac{6}{25}}$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Avem succesiv

$$1 - 3x \geq 10 \Leftrightarrow -9 \geq 3x \Leftrightarrow -3 \geq x \Leftrightarrow \boxed{x \in (-\infty, -3]}$$

(b) Avem

$$\log_2 \frac{1}{2} + \log_3 \frac{1}{3} = \log_2 \left(2^{-1}\right) + \log_3 \left(3^{-1}\right) = (-1) + (-1) = \boxed{-2}.$$

(c) $\log_3(x^2+5) = 2 \Leftrightarrow x^2+5 = 3^2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x \in \{-2, 2\}$. Deoarece ni s-au cerut soluţiile pozitive, ecuaţia are soluţia unică $\boxed{x = 2}$.

(d) Deoarece $f(1)$ poate lua doar 1 valoare (anume 2) şi pe $f(2)$ îl putem alege în 3 moduri, numărul tuturor funcţiilor detipul din enunţ este $1 \cdot 3 = \boxed{3}$.

(e) Examinând tabelul

n	1	2	3	4	5
$n!$	1	2	6	24	120
2^{n+1}	4	8	16	32	64

constatăm că inegalitatea are loc numai pentru patru numere din cinci (anume $n \in \{1, 2, 3, 4\}$). Probabilitatea cerută este $\boxed{p = \frac{4}{5}}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) $\boxed{f'(x) = \frac{1}{1+x^2}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) Din teorema Leibnitz–Newton rezultă

$$\int_0^1 f'(x)\,dx = f(1) - f(0) = \boxed{\frac{\pi}{4}}.$$

(c) Limita din enunţ este tocmai definiţia derivatei funcţiei f în $x = 0$, adică $\boxed{f'(0) = 1}$.

(d) Am văzut că $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Aşadar f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

(e) Dând factor forţat pe n atât la numărător cât şi la numitor obţinem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{4n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{4+\frac{5}{n}} = \frac{2+0}{4+0} = \boxed{\tfrac{1}{2}}.$$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Verificăm prin calcul:

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)I_2 =$$
$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+da & ab+db \\ ac+dc & ad+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De altfel, această identitate are loc pentru orice matrice 2x2 cu coeficienţi într-un inel comutativ.

(b) Avem identitatea de matrici

$$(X-\sqrt{5}I_2)(X+\sqrt{5}I_2) = X^2-\sqrt{5}X+\sqrt{5}X+\left(\sqrt{5}\right)^2 I_2 = X^2-5I_2.$$

(c) Condiţia $f(\sqrt{5})=0$ este echivalentă cu

$$5-(a+d)\sqrt{5}+ad-bc=0.$$

Presupunând prin absurd că $a+d\neq 0$ ar rezulta

$$\sqrt{5}=\frac{5+ad-bc}{a+d}\in\mathbb{Q},$$

contradicţie. Prin urmare $a+d=0$, de unde rezultă şi $ad-bc=-5$.

(d) Avem $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)-4\cdot 1 = \boxed{-5}$.

(e) Folosind identitatea de la punctul (a), ne concentrăm căutarea printre matricile $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ce verifică $a+d=0$ şi $ad-bc=-5$. O astfel de matrice a apărut la punctul precedent! Pe scurt, matricea $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ verifică identitatea $B^2-5I_2=O_2$.

(f) Relaţia $\det(XY)=\det X\cdot\det Y$ este validă pentru orice matrici pătrate cu coeficienţi într-un inel comutativ.

(g) Fie $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Introducem funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(t)=\det(X-tI_2)$. Prin verificare directă observăm că

$$f(t)=t^2-(a+d)t+ad-bc, \quad \forall t\in\mathbb{R}$$

Din ipoteză, folosind şi punctul precedent, rezultă

$$f(\sqrt{5})\cdot f(-\sqrt{5})=\det(X-\sqrt{5}I_2)\det(X+\sqrt{5}I_2)=\det(X^2-5I_2)=0.$$

Prin urmare una dintre rădăcinile polinomului f coincide cu $\sqrt{5}$ sau cu $-\sqrt{5}$. În ambele cazuri, folosind propoziţia demonstartă la (c), obţinem $a+d=0$ şi $ad-bc=-5$. Întorcându-ne la identitatea de la (a) rezultă

$$X^2 - 0\cdot X + (-5)I_2 = O_2,$$

q.e.d.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) $f(-x) = 3^{-x} + 3^{-(-x)} = 3^{-x} + 3^{x} = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) Avem $f'(x) = \boxed{3^x \cdot \ln 3 - 3^{-x}\cdot \ln 3}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(c) Continuând calculul de la punctul (b), mai putem scrie

$$f'(x) = 3^{-x}\cdot \ln 3 \cdot \left(3^{2x}-1\right) \begin{cases} >0 & ,x>0 \\ <0 & ,x<0 \end{cases},$$

aşadar f este strict crescătoare pe intervalul $[0,\infty)$ respectiv strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty,0]$.

(d) Propoziţia demonstrată mai sus la (c) implică faptul că $x=0$ este punct de minim global al funcţiei f. Cu alte cuvinte,

$$f(x) \geq f(0), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Or, $f(0)=2$.

(e) Calculăm derivata a doua a funcţiei f:

$$f''(x) = 3^x \cdot (\ln 3)^2 + 3^{-x}\cdot(\ln 3)^2 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

aşadar f este convexă pe $\mathbb{R}$.

(f) Putem calcula numărătorul în mod explicit:

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x (3^x+3^{-x})\,dx = \left(\frac{3^t}{\ln 3} - \frac{3^{-t}}{\ln 3}\right)\Bigg|_0^x = \frac{1}{\ln 3}(3^x-3^{-x}), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Limita devine astfel mai prietenoasă. O calculăm dând factor forţat pe 3^x atât la numitor cât şi la numărător:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3^x-3^{-x}}{\ln 3\,(3^x+3^{-x})} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-3^{-2x}}{\ln 3\,(1+3^{-2x})} = \frac{1-0}{\ln 3(1+0)} = \boxed{\frac{1}{\ln 3}}.$$

(g) Evident că $x=1$ este o soluţie a ecuaţiei. Demonstrăm că este şi unica. Fie deci $x \in (0,\infty)\setminus\{1\}$. Distingem următoarele două cazuri:

(1) $x<1$. Atunci $x > x^5$ şi $x^{27} > x^{2007}$. Deoarece f este funcţie strict crescătoare pe $(0,\infty)$ rezultă $f(x) > f(x^5)$ şi $f(x^{27}) > f(x^{2007})$. Prin adunare obţinem

$$f(x) + f(x^{27}) > f(x^5) + f(x^{2007}).$$

(2) $x > 1$. Atunci $x < x^5$ şi $x^{27} < x^{2007}$. Deoarece f este funcţie strict crescătoare pe $(0, \infty)$ rezultă $f(x) < f(x^5)$ şi $f(x^{27}) < f(x^{2007})$. Prin adunare obţinem

$$f(x) + f(x^{27}) < f(x^5) + f(x^{2007}).$$

Pro Didactica vă urează succes la BAC.
De la toamnă vă aşteptăm cu întrebări din materia de facultate.