BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 17

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 17

1. Subiectul I

Rezolvare.

(a) Punctul A aparţine cercului dacă şi numai dacă
$$1^2 + (-2)^2 - a = 0 \iff \boxed{a = 5}.$$

(b) Dreapta $x = 4$ este paralelă cu axa Oy. O dreaptă perpendiculară pe ea este axa Ox, de ecuaţie $\boxed{y = 0}$.

(c) $\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \boxed{0}$.

(d) $|z| = |\sqrt{2} - \sqrt{2}i| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \boxed{2}$.

(e) Folosind teorema cosinusului în triunghiul ABC, avem
$$\begin{aligned} |AC|^2 &= |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB|\cdot|BC|\cdot\cos\widehat{B} \\ &= 16 + 4 - 16\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 20 - 8\sqrt{3}. \end{aligned}$$
Deci $|AC| = \sqrt{20 - 8\sqrt{3}} = \boxed{2\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}}$.

(f) Aria triunghiului ABC este
$$S = \frac{|AB|\cdot|BC|\cdot\sin\widehat{B}}{2} = \frac{4\cdot 2\cdot\frac{1}{2}}{2} = \boxed{2}.$$

2. Subiectul II.1

Rezolvare.

(a) Evident $-\hat{3} = \widehat{(-3)} = \boxed{\hat{5}}$.

(b) $\log_3 2 + \log_3 x = 1 \iff \log_3(2x) = 1 \iff 2x = 3^1 = 3 \iff \boxed{x = \frac{3}{2}}$.

(c) $9^x = 27 \iff 3^{2x} = 3^3 \iff 2x = 3 \iff \boxed{x = \frac{3}{2}}$.

(d) Un număr $\overline{abcd}$ de exact patru cifre, cu a, d pare poate fi format în mod arbitrar alegând $a \in \{2,4,6,8\}$, $b, c \in \{0,1,2,\ldots,9\}$ respectiv $d \in \{0,2,4,6,8\}$. Aceste alegeri pot fi făcute simultan şi independent în $4 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = \boxed{2000}$ de moduri posibile.

(e) Într-un grup de 6 persoane putem alege în $C_6^2 = \boxed{15}$ moduri o mulţime de două persoane.

3. Subiectul II.2

Rezolvare.

(a) Deoarece $f'(x) = \frac{1}{x}$, $\forall x \in (0, \infty)$, în particular avem $\boxed{f'(1) = 1}$.

(b) Ecuaţia tangentei în $(x_0, f(x_0))$ la graficul funcţiei derivabile f este dată de

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,.$$

În cazul de faţă, avem $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$ iar ecuaţia tangentei este

$$\boxed{y = x - 1}\,.$$

(c) Avem

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} [f(n+1) - f(n)] &= \lim_{n\to\infty}[\ln(n+1) - \ln n] = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{n+1}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln 1 = \boxed{0}\,.\end{aligned}$$

(d) Având o nedeterminare de tipul $\frac{\infty}{\infty}$, folosim regula lui l'Hopital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \boxed{0}\,.$$

(e) Substituţia $y = \ln x$ conduce la $dy = \frac{1}{x}\,dx$. Atunci

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_{\ln 1}^{\ln e} y\,dy = \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^1 = \boxed{\frac{1}{2}}\,.$$

4. Subiectul III

Rezolvare.

(a) Deoarece $\det A(1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{1} \neq 0$, matricea $A(1)$ are rangul maxim, adică $\boxed{3}$.

(b) Fie $x, y \in U$. Atunci

$$A(x)A(y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & y & 1 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \star & 1+y & 2+y \\ \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \end{pmatrix},$$

unde prin $\star$ indicăm coeficienţi care nu ne interesează. Observăm că, deoarece $1+y \neq 2+y$, matricea de mai sus NU poate aparţine mulţimii V, indiferent de alegerea elementelor x şi y.

(c) Avem

$$B^2 = \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}1&3&6\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}}.$$

(d) Demonstrăm afirmaţia prin inducţie după $n \in \mathbb{N}^*$. Verificarea a fost deja făcută pentru $n \in \{1,2,3\}$. Presupunând propoziţia adevărată pentru n anumit $n \in \mathbb{N}^*$, rezultă

$$\begin{aligned} B^{n+1} &= BB^n = \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&n&\frac{n(n+1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}1&n+1&\frac{n(n+1)}{2}+n+1\\0&1&n+1\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&n+1&\frac{(n+1)(n+2)}{2}\\0&1&n+1\\0&0&1\end{pmatrix}, \end{aligned}$$

deci propoziţia este adevărată şi pentru $n+1$. Conform principiului inducţiei, propoziţia este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

(e) Alegem $A = B = A(1)$. Atunci $AB = BA = B^2$ şi

$$\det(AB) = (\det B)^2 = 1^2 = 1 \in U.$$

Am demonstrat existenţa unor matrici cu proprietăţile cerute? Am demonstrat!

(f) Dacă $C \in T$ are opt elemente egale, fie $i \in \{1,2,3\}$ coloana matricii C pe care se găseşte cel de-al nouălea element ("oaia neagră"). Deoarece **celelalte două coloane coincid**, rezultă că $\det C = 0$, q.e.d.

(g) De exemplu, matricea $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix} \in T$, iar

$$\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&1\end{vmatrix} = 0+1+1-0-0-1 = 1 \neq 0.$$

5. Subiectul IV

Rezolvare. Să observăm că

$$f(x) = \frac{x^3-3x^2+4}{x^2} = x-3+\frac{4}{x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

(a) $f'(x) = \boxed{1 - \frac{8}{x^3}}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

(b) Determinăm punctele critice:

$$f'(x) = 0 \iff 1 - \frac{8}{x^3} = 0 \iff x^3 = 8 \iff x = 2\,.$$

Deoarece în $x = 2$ funcţia f' îşi schimbă semnul, punctul $\boxed{x = 2}$ este punct de extrem local (unic, de altfel).

(c) Deoarece $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x - 3 + \frac{2}{x^2}\right) = \infty$, dreapta de ecuaţie $\boxed{x = 0}$ este asimptotă verticală la graficul lui f. E clar că este şi singura, deoarece f este continuă pe $(-\infty, 0)$ respectiv $(0, \infty)$.

(d) Deoarece $f''(x) = \frac{24}{x^4} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, funcţia f este convexă pe fiecare interval de continuitate.

(e) Studiem variaţia funcţiei pe trei intervale. Pe fiecare dintre ele funcţia este continuă.

- pe $(-\infty, 0)$ avem $f'(x) > 0$, deci f este strict crescătoare. Deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ şi $\lim\limits_{x\to 0^-} = \infty$, ecuaţia $f(x) = 3$ are o soluţie pe acest interval.
- pe $(0, 2)$ avem $f'(x) < 0$, deci f este strict descrescătoare. Deoarece $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ şi $f(2) = 2 - 3 + 1 = 0$, ecuaţia $f(x) = 3$ are o soluţie şi pe acest interval.
- în fine, pe $(2, \infty)$ avem $f'(x) > 0$, deci f este strict crescătoare. Deoarece $f(2) = 0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, ecuaţia $f(x) = 3$ are o soluţie pe acest interval.

Aşadar, ecuaţia dată are $\boxed{\text{3 soluţii}}$.

(f) $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(-3 + \frac{4}{x^2}\right) = \boxed{-3}$.

(g) Am văzut mai sus că $x = 2$ este punct de minim pe intervalul $(0, \infty)$. Deoarece $f(x) > 0$, $\forall x \in [1, 2)$ rezultă direct din monotonia integralei că

$$\int_1^2 f(x)\,dx > 0\,.$$

Inegalitatea strictă se datorează continuităţii funcţiei f.
Observaţie. Putem calcula în mod explicit

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \left(x - 3 + \frac{4}{x^2}\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - 3x - \frac{4}{x}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{1}{2} > 0\,.$$

Pro Didactica vă urează succes la BAC.
De la toamnă vă aşteptăm cu întrebări din materia de facultate.