BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 16

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 16

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Calculând fiecare din termenii sumei avem $z = i - 1 - i + 1 + i - 1 - i = -1$, deci $|z| = \boxed{1}$.

(b) Amplificând cu conjugatul numitorului, $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$. Partea reală este

$$\boxed{\tfrac{1}{2}}$$

(c) Calculăm lungimile laturilor triunghiului:

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(0-3)^2 + (3-3)^2} = 3 \\ AC &= \sqrt{(3-3)^2 + (0-3)^2} = 3 \\ AB &= \sqrt{(3-0)^2 + (0-3)^2} = 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

Observăm că $AB^2 = AC^2 + BC^2$, deci triunghiul este dreptunghic cu ipotenuza AB. Avem atunci raza cercului circumscris este $\frac{AB}{2} = \boxed{\frac{3\sqrt{2}}{2}}$.

(d) Notând cu l (respectiv d, respectiv V), latura (respectiv diagonala, respectiv volumul) cubului, avem $d = l\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{12} = l\sqrt{3} \Rightarrow l = 2 \Rightarrow V = l^3 = \boxed{8}$.

(e)

$$\sin\pi + \sin\frac{\pi}{2} = 0 + 1 = \boxed{1}$$

(f) Cele două puncte sunt simetrice faţa de axa Oy. Mediatoarea va fi atunci chiar axa Oy, ce are ecuaţia

$$\boxed{x = 0}$$

2. Subiectul II.1

Rezolvare.

(a) Cum $f(0) = 3$, rezultă $\boxed{g(3) = 0}$.

(b) Suma cerută este dezvoltarea după formula binomului lui Newton a lui $(1+1)^8$, deci va fi egală cu

$$\boxed{2^8}$$

(c) Elementele inversabile din $\mathbb{Z}_5$ sunt $\widehat{1},\widehat{2},\widehat{3},\widehat{4}$. Produsul lor este

$$\boxed{\widehat{4}}$$

(d) Pentru $x = 2$ avem

$$\log_2(4\cdot 2-4) = \log_2 4 = 2$$

Pentru $x = 4$

$$\log_2(4\cdot 4-4) = \log_2 12 \neq 2$$

Probabilitatea cerută este deci

$$\boxed{\tfrac{1}{2}}$$

(e) Conform ultimei relaţii a lui Viète, produsul rădăcinilor este $(-1)^4\dfrac{3}{1} = \boxed{3}$.

3. Subiectul II.2

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \neq 0$, prin aducere la acelaşi numitor avem

$$x + \frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{x} = f(x)$$

(b) Pentru orice $x \neq 0$ avem

$$f'(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)' = 1 - \frac{1}{x^2} = \boxed{\frac{x^2-1}{x^2}}$$

(c) Limita cerută este $f'(1)$, ceea ce conform punctului precedent este $\boxed{0}$.

(d) Cum $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, graficul funcţiei f nu are asimptotă orizontală către ∞. Căutăm asimptota oblică (dacă există):

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2} = 1 = m\\
\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx) &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0 = n
\end{aligned}$$

Graficul lui f admite astfel spre ∞ asimptota oblică $y = mx + n$ adică

$$\boxed{y = x}$$

(e) Punctele critice sunt date de $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$. Cum f' schimbă semnul în aceste puncte, ele vor fi de extrem local. Deci mulţimea punctelor de extrem local este $\boxed{\{-1, 1\}}$.

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{C}$, $(x-1)(x^2+x+1) = x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 = x^3 - 1$.

(b) ω fiind soluţie a ecuaţiei $x^2+x+1 = 0$, va verifica ecuaţia, deci $\omega^2+\omega+1 = 0$. Conform punctului precedent, $\omega^3 - 1 = (\omega-1)(\omega^2+\omega+1) = 0$, deci $\omega^3 = 1$.

(c)

$$A^2 = \begin{pmatrix} \omega^2 & \omega \\ -1 & -\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega^2 & \omega \\ -1 & -\omega^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \omega^4 - \omega^2 & \omega^3 - \omega^3 \\ -\omega^2 + \omega^2 & -\omega + \omega^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$$

(d) $(I_2 + A)(I_2 - A) = I_2 - A + A - A^2 = I_2 - O_2 = I_2$

(e) Conform punctului precedent, $I_2 + A$ este inversabilă, inversa sa fiind $\boxed{I_2 - A}$.

(f) Folosind punctul (c) avem

$$B = A + A^2 + A^3 + ... + A^{2007} = A + O_2 + O_2 + ... + O_2 = A$$

Deci $\det(B) = \det(A) = -\omega^4 + \omega = 0$. Cum $B \neq O_2$, rezultă că $\operatorname{rang}(B) = \boxed{1}$.

(g) Cum $B = A$, avem $f(B) = f(A) = A^2 - 3A = \boxed{-3A}$.

5. Subiectul IV

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $f'(x) = \boxed{\dfrac{1}{x^2+1}}$.

(b) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $g'(x) = f'(x) - \dfrac{2x}{x^2+1} = \boxed{\dfrac{1-2x}{x^2+1}}$.

(c) $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ strict crescătoare pe $\mathbb{R} \Rightarrow$ nu are puncte de extrem local.
$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. Pentru $x < \frac{1}{2}$ $g'(x) > 0$, iar pentru $x > \frac{1}{2}$ $g'(x) < 0$. Deci $x = \frac{1}{2}$ este punct de maxim local.

(d)

$$a_{n+1} - a_n = f(n+1) = \operatorname{arctg}(n+1) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Deci $a_{n+1} > a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Şirul (a_n) este în concluzie strict crescător.

(e) Integrăm prin părţi:

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx = \int_0^1 x' \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}}$$

(f)

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \operatorname{arctg}\infty = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

(g) Conform punctului (c), $x = \frac{1}{2}$ este punct de maxim global pentru g, deci $g(x) \leq g\left(\frac{1}{2}\right), \forall x \in \mathbb{R}$, adică

$$g(x) \leq \operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \ln\frac{5}{4}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Prin integrare de la 0 la 1 şi folosind monotonia integralei, rezultă

$$\int_0^1 g(x)\,dx \leq \int_0^1 \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \ln\frac{5}{4}\right)dx = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \ln\frac{5}{4}$$