BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 14

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 14

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) $\cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{4} = 0\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{0}$

(b) Singura soluţie din intervalul $[0,\pi]$ a ecuaţiei $\cos x = 0$ este $x = \boxed{\frac{\pi}{2}}$.

(c) **Prima soluţie.** Orice număr complex de forma $z = \cos t + i\sin t$ are modulul egal cu unu. Dacă $z = \cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$ avem de calculat:

$$\left|z^{49}\right| = |z|^{49} = 1^{49} = \boxed{1}.$$

A doua soluţie. Folosind formula lui de Moivre, avem

$$\begin{aligned}\left(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right)^{49} &= \cos\frac{49\pi}{7} + i\sin\frac{49\pi}{7} = \cos 7\pi + i\sin 7\pi\\ &= \cos(\pi + 3\cdot 2\pi) + i\sin(\pi + 3\cdot 2\pi)\\ &= \cos\pi + i\sin\pi = -1 + i\cdot 0\end{aligned}$$

iar $|-1+i\cdot 0| = \sqrt{(-1)^2+0^2} = \boxed{1}$.

(d) Coordonatele mijlocului segmentului AB sunt mediile aritmetice ale coordonatelor lui A şi B, adică $\left(\frac{3+1}{2}, \frac{-4+2}{2}\right) = \boxed{(2,-1)}$.

(e) Centrul cercului este mijlocul segmentului AB, care aşa cum am văzut la punctul precedent are coordonatele $(2,-1)$. Lungimea diametrului este $d(A,B) = \sqrt{(3-1)^2+(-4-2)^2} = \sqrt{4+36} = 2\sqrt{10}$. Raza cercului are atunci lungimea $\sqrt{10}$, iar ecuaţia este $\boxed{(x-2)^2+(y+1)^2 = 10}$.

(f) **Prima rezolvare.** Observăm că triunghiul este dreptunghic cu unghiul drept în A, căci $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Atunci mediana din A are lungimea jumătate din ipotenuză, adică $\boxed{5/2}$.

A doua rezolvare. Fie M mijlocul lui BC. Atunci $AM^2 = \frac{AB^2+AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = \frac{3^2+4^2}{2} - \frac{5^2}{4} = \frac{25}{4}$. Deci $AM = \boxed{\frac{5}{2}}$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) Raţia progresiei aritmetice este $r = a_2 - a_1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$. Atunci $a_{15} = a_1 + 14 \cdot r = 1 + 14 \cdot 12 = \boxed{8}$.

(b) Ecuaţia se scrie echivalent $\begin{vmatrix} x & 0 \\ 8 & x+1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 0\}$. Cum 2 din cele elemente ale mulţimii sunt soluţii, probabilitatea este $\frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$.

(c) Numerele de tipul cerut au cifrele permutări ale elementelor mulţimii, deci sunt în număr de $3! = \boxed{6}$. De altfel în cazul de faţă putem scrie chiar toate numerele de tipul cerut: $357, 375, 537, 573, 735$, 753.

(d) $(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(3 \cdot 1 - 2) = f(1) = \boxed{1}$.

(e) Folosind faptul că $i^2 = -1$, $i^4 = 1$, avem $f(i) = i^4 + i^3 + i^2 + i + 1 = 1 + i^2 \cdot i - 1 + i + 1 = \boxed{1}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x > 0$ avem $f'(x) = \boxed{\frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}}$.

(b) Folosind punctul (a), vedem că ecuaţia $f'(x) = 0$ are singura soluţie $x = 1$. Cum pentru $0 < x < 1$, avem $f'(x) > 0$ şi pentru $x > 1$ avem $f'(x) < 0$, rezultă că $\boxed{x = 1}$ este un punct de extrem pentru f. Mai exact $x = 1$ este punct de maxim.

(c) Continuăm calculul de la (a). Pentru orice $x > 0$ avem $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, deci f este concavă pe $(0, \infty)$.

(d) Separăm limita în diferenţa a doua limite de funcţii, iar pentru prima din ele folosim regula lui l'Hopital pentru un caz de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$. Avem $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} - 1 = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} - 1 = 0 - 1 = \boxed{-1}$.

(e)

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx &= \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x} - 1 \right) dx = \left(\frac{\ln^2 x}{2} - x \right) \Big|_1^e \\ &= \frac{\ln^2 e - \ln^2 1}{2} - (e - 1) = \boxed{\frac{3}{2} - e} \end{aligned}$$

4. Subiectul III.

Rezolvare. Pentru $z, u \in \mathbb{C}$, vom nota $A(z,u) = \begin{pmatrix} z & u \\ -\bar{u} & \bar{z} \end{pmatrix}$. Atunci

$$M = \{A(z,u) | z, u \in \mathbb{C}\}$$

(a) Avem $I_2 = A(1,0) \in M$ şi $O_2 = A(0,0) \in M$.

(b) Fie $z \in \mathbb{C}$ şi fie x partea reală iar y partea imaginară a lui z. Atunci $z = x + iy$. Prin definiţie $\bar{\bar{z}} = \overline{x - iy} = x + iy = z$.

(c) Fie $z_1 = x_1 + iy_1$ şi $z_2 = x_2 + iy_2$. Atunci

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)} = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) \\ &= \overline{x_1 + iy_1} + \overline{x_2 + iy_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \\ \overline{z_1 z_2} &= \overline{(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)} = \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)} \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1) = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) \\ &= \overline{x_1 + iy_1} \cdot \overline{x_2 + iy_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \end{aligned}$$

(d) Fie $A = A(z,u) \in M$ şi $B = A(w,v) \in M$. Folosind punctul (c) avem

$$\begin{aligned} A + B &= A(z,u) + A(w,v) = \begin{pmatrix} z & u \\ -\bar{u} & \bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w & v \\ -\bar{v} & \bar{w} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z + w & u + v \\ -\bar{u} - \bar{v} & \bar{z} + \bar{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z + w & u + v \\ -\overline{u + v} & \overline{z + w} \end{pmatrix} \\ &= A(z + w, u + v) \in M \\ A \cdot B &= A(z,u) \cdot A(w,v) = \begin{pmatrix} z & u \\ -\bar{u} & \bar{z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w & v \\ -\bar{v} & \bar{w} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} zw - u\bar{v} & zv + u\bar{w} \\ -\bar{u}w - \bar{z}\bar{v} & -\bar{u}v + \bar{z}\bar{w} \end{pmatrix} = A(zw - u\bar{v}, zv + u\bar{w}) \in M \end{aligned}$$

(e) Fie $A = A(z,u) \in M$. Atunci $\det A(z,u) = z \cdot \bar{z} - u \cdot (-\bar{u}) = |z|^2 + |u|^2 \in \mathbb{R}$

(f) Fie $z \in \mathbb{C}$. Notăm $P(n) : \ A(z,0)^n = A(z^n, 0)$ (aceasta este exact egalitatea de matrice din enunţ). Demonstraăm prin inducţie că $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Verificare. Cum $A(z,0)^1 = A(z^1,0)$, $P(1)$ este evident adevărată.

Pasul de inducţie. Presupunem $P(n)$ adevărată. Folosind de exemplu calculul din partea doua a rezolvării lui (d), avem $A(z,0)^{n+1} = A(z,0)^n \cdot A(z,0) = A(z^n,0) \cdot A(z,0) = A(z^{n+1},0)$.

Conform principiului inducţiei, $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

(g) Conform punctului precedent, ecuaţia este echivalentă cu

$$A(z,0) + A(z^2,0) + \ldots + A(z^{2007},0) = O_2 \Leftrightarrow A(z + z^2 + \ldots + z^{2007}) = O_2$$

Dar această egalitatea de matrice este echivalentă cu $z + z^2 + \ldots + z^{2007} = 0$. Observăm că $z = 1$ nu este rădăcină a acestei ecuaţii. Folosind formula sumei unei progresii geometrice, ecuaţia devine $z\frac{z^{2007}-1}{z-1} = 0$. Cum ni se cer doar rădăcini reale, obţinem $z = \boxed{0}$.

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $f(x) = \frac{e}{e^{x+1}} - \frac{1}{e^{x+1}} = \frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^{x+1}}$.

(b) Cum $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, ecuaţia asimptotei (orizontale) a graficului lui f către ∞ este $\boxed{y = 0}$.

(c) Deoarece $f(x) = (e-1)e^{-x-1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, avem $f'(x) = (e-1)\cdot(-1)\cdot e^{-x-1} = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(d) Folosind punctul (a), pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem

$$\begin{aligned} a_n &= f(1) + f(2) + \ldots + f(n) \\ &= \left(\frac{1}{e^1} - \frac{1}{e^2}\right) + \left(\frac{1}{e^2} - \frac{1}{e^3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{e^n} - \frac{1}{e^{n+1}}\right) \\ &= \frac{1}{e} - \frac{1}{e^{n+1}} = \frac{1}{e}\left(1 - \frac{1}{e^n}\right) \end{aligned}$$

(e) Folosind punctul precedent, avem $\lim_{n\to\infty} a_n = \boxed{\frac{1}{e}}$.

(f) Cum $f(x) > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, aria cerută este dată de

$$\int_0^1 f(x)\,dx \overset{(c)}{=} \int_0^1 [-f'(x)]\,dx = -f(1) + f(0) = -\frac{e-1}{e^2} + \frac{e-1}{e} = \boxed{\frac{(e-1)^2}{e^2}}.$$

(g) Evaluăm mai întâi $\int_1^n f(x)\,dx = \int_1^n (-f'(x))\,dx = -f(n) + f(1) = -\frac{e-1}{e^{n+1}} + \frac{e-1}{e^2}$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n + \int_1^n f(x)\,dx\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^{n+1}} - \frac{e-1}{e^{n+1}} + \frac{e-1}{e^2}\right) = \boxed{\frac{2e-1}{e^2}}$$

Pro Didactica vă urează succes la BAC.
De la toamnă vă aşteptăm cu întrebări din materia de facultate.