BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 13

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 13

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Folosind faptul ca distanţa de la un punct $M(x_0, y_0)$ la dreapta de ecuaţie $ax + by + c = 0$ este dată de $\frac{|ax_0 + bx_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. În cazul de faţă, distanţa de la punctul $A(1, 3)$ la dreapta $x + y - 5 = 0$ egală cu $\frac{|1 + 3 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

(b) Pe intervalul $[0, \pi]$, avem $\cos x = \frac{1}{2}$ doar pentru $\boxed{x = \frac{\pi}{3}}$.

(c) Doi vectori sunt perpendiculari dacă şi numai dacă produsul lor scalar este nul. Condiţia $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ este echivalentă cu $2 \cdot (-1) + m(m + 1) = 0$, sau $m^2 + m - 2 = 0$, de unde $\boxed{m_1 = 1, m_2 = -2}$.

(d) Folosind formula $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n + 1)}{2}$ avem

$$i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot ... \cdot i^{10} = i^{1+2+3+...+10} = i^{\frac{10 \cdot 11}{2}} = i^{55} = i^3 \cdot i^{52} = -i \cdot (i^4)^{13} = -i \cdot 1^{13} = -i.$$

Produsul este deci $-i$, iar partea lui reală este $\boxed{0}$.

(e) Ecuaţia cercului cu centrul în $M(x_M, y_M)$ şi rază r este dată de: $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 - r^2 = 0$. Lungimea segmentului $[AB]$ este egală cu $\sqrt{(2 - 4)^2 + (6 - 8)^2} = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$, de unde raza cercului este $r = \frac{AB}{2} = \sqrt{2}$. Centrului cercului M se află la mijlocul segmentului AB. Coordonatele lui M sunt: $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = 3$ şi $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = 7$. Deci ecuaţia cercului este: $\boxed{(x - 3)^2 + (y - 7)^2 = 2}$.

(f) Folosind formula $\text{Aria}_{\Delta ABC} = \frac{ab \sin C}{2}$, unde a, b sunt lungimile a două laturi ale triunghiului şi C unghiul cuprins între ele, obţinem că aria triunghiului echilateral de latură $\sqrt{2}$ egală cu

$$\frac{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sin 60^\circ}{2} = \boxed{2\sqrt{3}}$$

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) $\det A = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-3) - (-4) \cdot 4 = \boxed{1}$.

(b) Ecuaţia $3^{x^2} = 81$ este echivalentă cu $3^{x^2} = 3^4$. Folosind injectivitatea funcţiei exponenţiale, ecuaţia se reduce la $x^2 = 4$, de unde $\boxed{x_1 = 2, x_2 = -2}$.

(c)

$$\begin{aligned} f(1) + f(2) + ... + f(20) &= (2 \cdot 1 + 3) + (2 \cdot 2 + 3) + ... + (2 \cdot 20 + 3) \\ &= 2(1 + 2 + ... + 20) + 3 \cdot 20 \\ &= 2\frac{20 \cdot 21}{2} + 60 = \boxed{480} \end{aligned}$$

(d) Numerele prime din mulţimea $\{1, 2, 5, 6, 9, 11\}$ sunt $2, 5$ şi 11, în total 3 numere. Cum mulţimea dată are 6 elemente, probabilitatea ca un număr din mulţime să fie prim este $\frac{3}{6} = \boxed{\frac{1}{2}}$.

Problema este confuză şi ar fi trebuit schimbată. Sperăm că şi propunătorul şi cei care vor face baremul de corectare ştiu că 1 **nu este considerat număr prim**. Numărul 1 este considerat un caz special, nici prim şi nici compus. Dacă baremul consideră că 1 este prim (cum mulţi matematicieni considerau până acum câteva zeci de ani) atunci răspunsul corect va fi $\boxed{\frac{4}{6}}$.

(e) Cu formula $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ avem $C_n^2 = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{(n-1)n}{2}$. Ecuaţia $C_n^2 = 1$ este deci echivalentă cu $\frac{(n-1)n}{2} = 1$ sau $n^2 - n - 2 = 0$. Avem $\Delta = 9$, de unde $n_1 = \frac{1+3}{2} = 2$ şi $n_2 = \frac{1-3}{2} = -1$. Cum $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ rezultă soluţia unică $n_1 = \boxed{2}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) $f'(x) = (xe^x)' = x'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x = \boxed{e^x(1 + x)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) Conform definiţiei derivatei unei funcţii într-un punct avem

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = \boxed{2e}$$

(c) Punctele de extrem local ale unei funcţii se găsesc printre punctele unde derivata funcţiei este zero (punctele critice). Rezolvăm deci ecuaţia $f'(x) = 0$, echivalent cu $e^x(1 + x) = 0$. Cum $e^x > 0$, ecuaţia $e^x(1 + x) = 0$ este echivalentă cu $x + 1 = 0$, adică $x = -1$. Pentru $x < -1$, avem $f'(x) < 0$ şi pentru $x > -1$

avem $f'(x) > 0$, deci în $x = \boxed{-1}$ funcţia f are un minim global egal cu $f(-1) = -e^{-1}$.

(d)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(-n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-n)e^{-n}}{n} = -\lim_{n\to\infty} e^{-n} = \boxed{0}.$$

(e) Integrăm prin părţi:
$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx &= \int_0^1 xe^x dx = \int_0^1 x(e^x)'dx \\ &= xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 (x)'e^x dx = e - e^x\Big|_0^1 = \boxed{1}\end{aligned}$$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Din relaţiile lui Viète : $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{-1}{1} = \boxed{1}$.

(b) Impărţim polinomul f la polinomul g şi găsim că
$$X^4 - X^3 + 4X^2 + 3X + 5 = (X^2 + X + 1)(X^2 - 2X + 5)$$
De aici $f(z_1) = g(z_1)(z_1^2 - 2z_1 + 5) = 0$ şi analog $f(z_2) = 0$. Deci $f(z_1) + f(z_2) = \boxed{0}$.

(c) **Prima soluţie.** Am văzut deja la punctul (b) că restul împărţirii lui f la g este polinomul $\boxed{0}$.

(d) Calculăm mai întâi
$$\begin{aligned}(1+2i)^2 &= 1 + 4i + 4i^2 = -3 + 4i \\ (1+2i)^3 &= (1+2i)^2(1+2i) = (-3+4i)(1+2i) = -11 - 2i \\ (1+2i)^4 &= ((1+2i)^2)^2 = (-3+4i)^2 = -7 - 24i\end{aligned}$$
Folosind aceste rezultate, avem
$$\begin{aligned}f(1+2i) &= (1+2i)^4 - (1+2i)^3 + 4(1+2i)^2 + m(1+2i) + n \\ &= (-7-24i) - (-11-2i) + 4(-3+4i) + m(1+2i) + n \\ &= (m+n-8) + i(2m-6)\end{aligned}$$
Cum m, n sunt numere reale, pentru ca $f(1+2i) = 0$ se impun $m + n - 8 = 2m - 6 = 0$. Rezolvând acest sistem obţinem $\boxed{m = 3, n = 5}$.

A doua soluţie. Deoarece are coeficienţi reali, polinomul f are ca rădăcină şi pe $\overline{z} = 1 - 2i$, deci se divide cu polinomul de gradul doi $g = X^2 - 2X + 5$. Dar
$$X^4 - X^3 + 4X^2 + mX + n = (X^2 - 2X + 5)(X^2 + X + 1) + (m-3)X + n - 3.$$
Deci restul împărţirii celor două polinoame este $(m-3)X + n - 3$, are două rădăcini complexe **distincte**, aşadar coincide cu polinomul nul. Am găsit $m = n = 3$.

(e) Cum z_1 este rădăcină a lui g avem $z_1^2 + z_1 + 1 = 0$. Inmulţind cu $z_1 - 1$ obţinem $z_1^3 - 1 = (z_1 - 1)(z_1^2 + z_1 + 1) = 0$. Deci $z_1^3 = 1$. Analog se arată că $z_2^3 = 1$. De aici $z_1^3 + z_2^3 = \boxed{2}$.

(f) Avem $z_1^{2007} + z_2^{2007} = (z_1^3)^{669} + (z_2^3)^{669} = 1^{669} + 1^{669} = \boxed{2}$.

(g) Folosind (la sfârşit) relaţiile lui Viète, avem

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} \\ &= \frac{x_2x_3x_4 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_1x_2x_3}{x_1x_2x_3x_4} \\ &= \frac{\frac{-m}{1}}{\frac{n}{1}} = \boxed{-\frac{m}{n}} \end{aligned}$$

5. Subiectul IV.

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem

$$\begin{aligned} f'(x) &= \boxed{3x^2 - 3} \\ f''(x) &= \boxed{6x} \end{aligned}$$

(b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 - 3x}{x} = \lim_{x\to 0}(x^2 - 3) = \boxed{-3}.$$

(c) Studiem semnul derivatei f'. Fiind a funcţie de gradul doi care are rădăcinile $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, funcţia f' este pozitivă (adică are semnul coeficientului dominant) în afara rădăcinilor şi negativă între rădăcini. In concluzie

- f este strict crescătoare pe $(-\infty, -1)$
- f este strict descrescătoare pe $(-1, 1)$
- f este strict crescătoare pe $(1, \infty)$

(d) Conform studiului de la punctul (c), funcţia f are un maxim local pentru $x = -1$ şi un minim local pentru $x = 1$. Deci f are $\boxed{2}$ puncte de extrem local.

(e) Pe intervalul $[0, 2]$, funcţia f descreşte de la $f(0) = 0$ la $f(1) = -2$ şi apoi creşte la $f(2) = 2$. Deci pentru orice $x \in [0, 2]$ avem $-2 = f(1) \le f(x) \le f(2) = 2$.

(f) Integrând inegalitatea de la punctul (e) obţinem exact inegalitatea dorită.

(g) Deoarece

$$* \left(\frac{f(n)}{n^3 + 1}\right)^{2007n^2} = \left[\left(1 + \frac{-3n - 1}{n^3 + 1}\right)^{\frac{n^3+1}{-3n-1}}\right]^{\frac{2007n^2(-3n-1)}{n^3+1}}, \ n \in \mathbb{N}^*$$

$$** \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{-3n - 1}{n^3 + 1}\right)^{\frac{n^3+1}{-3n-1}} = e$$ (folosim limita clasică $\lim_{x\to 0}(1 + x)^{1/x} = e$)

*** $\lim_{n\to\infty} \frac{2007n^2(-3n-1)}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{-6021 - \frac{2007}{n}}{1+\frac{1}{n^3}} = -6021$

limita căutată este $\boxed{e^{-6021}}$.