BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 12

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 12

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Distanţa dintre cele două puncte este

$$|AB| = \sqrt{(4-1)^2 + [(2-(-2)]^2} = \boxed{5}.$$

(b) Cum $a = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{3\pi}{4} = b$, cel mai mare este deci $\boxed{b}$.

(c) Avem

$$\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\right)^{-1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2 \in \mathbb{Z}$$

(d) Vârfurile hexagonului pot fi unite cu $C_6^2 = 15$ segmente de dreaptă. Dintre acestea, un număr de şase segmente sunt laturile hexagonului. Toate celelalte sunt diagonale, în număr de $15 - 6 = \boxed{9}$.

(e) Ecuaţia are coeficienţi reali, este de gradul II iar coeficientul dominant este pozitiv. Deoarece $z = 1 - i$ este rădăcină, şi $\overline{z} = 1 + i$ este rădăcină. Obţinem $m = z\cdot\overline{z} = (1-i)(1+i) = \boxed{2}$.

(f) Avem

$$\begin{aligned} a + bi &= \frac{2+3i}{4+5i} = \frac{2+3i}{4+5i} = \frac{(2+3i)(4-5i)}{4^2+5^2} \\ &= \frac{1}{41}(23+2i) = \frac{23}{41} - \frac{2}{41}i. \end{aligned}$$

Prin urmare $\boxed{a = \frac{23}{41}}$ şi $\boxed{b = \frac{2}{41}}$.

2. Subiectul II.1.

Rezolvare.

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 1\cdot 7 - 5\cdot 3 = \boxed{-8}$.

(b) Observăm că $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$. Aşadar

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{2007} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{2005}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{2005}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) **Prima soluţie** Dacă $1+\sqrt{3}$ este rădăcina unui polinom $p \in \mathbb{Z}[X]$ atunci $\sqrt{3}$ este rădăcina polinomului $q(X) = P(X+1)$. De aici ne vine ideea să alegem $q = X^2 - 3$. Întorcându-ne la polinomul p obţinem

$$p(X) = q(X-1) = (X-1)^2 - 3 = \boxed{X^2 - 2X - 2}.$$

A doua soluţie Dacă $1+\sqrt{3}$ este rădăcină a unui polinom P cu coeficienţi întregi, atunci şi $1-\sqrt{3}$ este rădăcină a lui P. Putem lua deci $P(X) = (X-1-\sqrt{3})(X-1+\sqrt{3}) = (X-1)^2 - 3 = \boxed{X^2 - 2X - 2}$. Ecuaţia dorită este $P(X) = 0$.

(d) Deoarece mulţimea A are trei elemente, numărul tuturor submulţimilor ei este $2^3 = \boxed{8}$.

(e) Condiţia din enunţ este echivalentă cu inegalitatea

$$\left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n > 1$$

fiind satisfăcută de $n = 1$. Pentru $n = 2$ inegalitatea devine egalitate, iar cum expresia din stânga este descrescătoare (ambele fracţii sunt subunitare) rezultă că

$$\left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n < 1, \quad n \geq 5$$

Deci condiţia este satisfăcută numai de un număr din cinci. Probabilitatea cerută este $\boxed{p = \frac{1}{5}}$.

3. Subiectul II.2.

Rezolvare.

(a) $f'(x) = \boxed{5 - 2\cos x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) Avem

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (5x - 2\sin x)\,dx = \left(\frac{5x^2}{2} + 2\cos x\right)\Bigg|_0^1 = \boxed{\frac{1}{2} + 2\cos 1}.$$

(c) Limita din enunţ este exact definiţia derivatei funcţiei f în $x = 0$, adică

$$\boxed{f'(0) = 5 - 2\cos 0 = 3}.$$

(d) Derivata a doua este dată de $f''(x) = 2\sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ şi îşi schimbă semnul în $\boxed{x = 0}$. Nu ni s-au cerut toate punctele de inflexiune, ci doar un exemplu!

(e) Vom da factor comun forţat pe n^2 atât la numărător cât şi la numitor. Avem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2}{7n^2+n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{7+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}=\frac{5}{7+0-0}=\boxed{\frac{5}{7}}.$$

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Factorul s coincide cu coeficientul dominant al polinomului, adică $\boxed{s=1}$.

(b) Avem

$$(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)=f(1)=\boxed{1-p+q-r}.$$

(c) Conform relaţiilor lui Viète avem

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1+x_2+x_3=-\frac{-p}{1}=p \\ s_2 &= x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\frac{q}{1}=q. \end{aligned}$$

Atunci

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=s_1^2-2s_2=p^2-2q,$$

q.e.d.

(d) Aplicăm punctul precedent polinomului g, în care caz avem $p=q=1$ şi $r=2$. Rezultă că suma pătratelor rădăcinilor lui g este

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=p^2-2q=1^2-2\cdot 1=-1,$$

Deoarece orice sumă de pătrate de numere reale este pozitivă rezultă că cel puţin una din rădăcinile polinomului g nu este număr real, q.e.d.

(e) Pentru orice $x\le 0$ avem $x^3\le 0$, $-px^2\le 0$ şi $qX\le 0$, de unde $f(x)\le -r<0$.

(f) O consecinţă directă a propoziţiei de la punctul (e) este faptul că polinomul f nu are rădăcini în intervalul $(-\infty,0]$.

(g) Notăm $p=a+b+c$, $q=ab+bc+ca$ şi $q=abc$. Introducem polinomul $h(X)=(X-a)(X-b)(X-c)$. Deoarece

$$h(X)=X^3-\underbrace{(a+b+c)}_{=p}X^2+\underbrace{(ab+bc+ca)}_{=q}X-\underbrace{abc}_{=r},$$

suntem în condiţiile problemei curente. Conform punctului (f) acest polinom nu poate avea rădăcini în intervalul $(-\infty,0]$. Or, polinomul p are prin construcţie exact rădăcinile **reale** a, b şi c. Aşadar **toate aceste rădăcini** sunt numere pozitive, q.e.d.

5. Subiectul IV.

Rezolvare. Este util să observăm faptul că

$$f(x) = (x+2)^3 - x^3 = 6x^2 + 12x + 8, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Avem $f'(x) = 3(x+2)^2 - 3x^2 = \boxed{12(x+1)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) Studiem semnul derivatei a doua a funcţiei f. Avem $f''(x) = 12 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, aşadar f este convexă pe $\mathbb{R}$. Ne-am prefăcut că nu observăm faptul că f este o funcţie de gradul doi cu graficul o parabola cu “ramurile în sus”.

(c) Evident,

$$f'(x) = 12(x+1)\begin{cases} > 0 & , x > -1 \\ < 0 & , x < -1 \end{cases}$$

deci f este strict crescătoare pe intervalul $[-1, \infty)$ respectiv strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, -1]$.

(d) Din punctul anterior rezultă că $x = -1$ este punct de minim global pentru funcţia f. Valoarea minimă a funcţiei f este

$$\min f = f(-1) = 2.$$

Cu alte cuvinte $f(x) \geq 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(e) Fie F o primitivă a funcţiei f. Studiul monotoniei lui F se reduce la studiul derivatei sale care este chiar $F' = f$. Dar conform d) avem $F'(x) = f(x) \geq 2 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Prin urmare F este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, q.e.d.

(f) Aria cerută este integrala funcţiei $|f|$ pe intervalul $[0,1]$. Din cauză că f ia numai valori pozitive putem renunţa la modul. Aria devine egală cu

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (6x^2 + 12x + 8)\,dx = (2x^3 + 6x^2 + 8x)\Big|_0^1 = \boxed{16}.$$

(g) Avem

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(-x)}{f(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x^2 - 12x + 8}{6x^2 + 12x + 8} = \lim_{x\to\infty} \frac{6 - \frac{12}{x} + \frac{8}{x^2}}{6 + \frac{12}{x} + \frac{8}{x^2}} = \frac{6+0+0}{6-0+0} = \boxed{1}.$$

Pro Didactica vă urează succes la BAC.
De la toamnă vă aşteptăm cu întrebări din materia de facultate.