BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 10

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 10

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Numărul diagonalelor unui poligon convex cu n laturi este $C_n^2 - n$. În cazul nostru $C_5^2 - 5$, adică $\boxed{5}$

(b) Avem $\boxed{x = \frac{\pi}{6}}$

(c) Conform punctului precedent, $\cos x = \cos\frac{\pi}{6} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

(d)

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-1-3}{-1-3} = \boxed{1}$$

(e) Coordonatele mijlocului segmentului (AB) sunt $(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2})$, adică

$$\boxed{(1,1)}$$

(f) De exemplu

$$\boxed{z = i}$$

2. Subiectul II.1

Rezolvare.

(a)

$$r = a_2 - a_1 = 1 - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

(b)

$$a_{10} = a_1 + 9r = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = \boxed{5}$$

(c)

$$S = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \boxed{\frac{55}{2}}$$

(d)

$$\det(A) = a_1a_4 - a_2a_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right) = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

(e) Primii cinci termeni ai progresiei sunt $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = 1$, $a_3 = \frac{3}{2}$, $a_4 = 2$, $a_5 = \frac{5}{2}$, iar soluţiile ecuaţiei date sunt 1 şi 2. Probabilitatea este deci $\boxed{\frac{2}{5}}$.

3. Subiectul II.2

Rezolvare.

(a) $f(0) = \ln 1 = \boxed{0}$

(b) Avem

$$\begin{aligned} \lim_{x\nearrow 2} f(x) &= \ln \frac{4}{0_+} = \ln\infty = \infty \\ \lim_{x\searrow -2} f(x) &= \ln 0 = -\infty \end{aligned}$$

deci ecuaţiile asimptotelor (verticale) sunt $\boxed{x = 2, x = -2}$. Cum funcţia este definită pe un interval mărginit nu poate avea asimptote oblice şi nici orizontale.

(c) Pentru orice $x \in (-2, 2)$ avem

$$f'(x) = \frac{2-x}{2+x} \cdot \frac{2-x+2+x}{(2-x)^2} = \boxed{\frac{4}{(2-x)(2+x)}}$$

(d) Pentru $x \in (-2, 2)$ avem $f'(x) > 0$, deci f este strict crescătoare.

(e)

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right) = f(0) = \boxed{0}$$

Am folosit faptul că f, fiind continuă, ”comută” cu limita.

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Fie $x, y \in G$, adică $x, y \in (-2, 2)$. Vom avea atunci $xy \in (-4, 4)$, deci $4 + xy > 0$. Demonstrăm că $x * y > -2$. Echivalent :

$$\frac{4x+4y}{4+xy} > -2 \Leftrightarrow 4x+4y > -8-2xy \Leftrightarrow xy+2x+2y+4 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(y+2) > 0$$

relaţie adevărată deoarece $x+2>0$ şi $y+2>0$.
Demonstrăm acum că $x*y<2$, echivalent cu

$$\frac{4x+4y}{4+xy}<2 \Leftrightarrow 4x+4y<8+2xy \Leftrightarrow xy-2x-2y+4>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(y-2)>0$$

relaţie adevărată deoarece $x-2<0$ şi $y-2<0$.

(b) Pentru orice $x,y,z\in G$ avem

$$\begin{aligned}(x*y)*z &= \frac{4(x*y)+4z}{4+(x*y)\cdot z}=\frac{4\cdot\frac{4x+4y}{4+xy}+4z}{4+\frac{4x+4y}{4+xy}\cdot z}\\ &= \frac{16x+16y+16z+4xyz}{16+4xy+4xz+4yz}\\ x*(y*z) &= \frac{4x+4(y*z)}{4+x\cdot(y*z)}=\frac{4x+4\cdot\frac{4y+4z}{4+yz}}{4+x\cdot\frac{4y+4z}{4+yz}}\\ &= \frac{16x+4xyz+16y+16z}{16+4yz+4xy+4xz}=(x*y)*z\,.\end{aligned}$$

(c)

$$x*0=\frac{4x}{4}=x, 0*x=\frac{4x}{4}=x$$

Deci $e=\boxed{0}\in G$ este elementul neutru.

(d) Pentru orice $x\in G$ avem

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\frac{2(f(x)-1)}{f(x)+1}=\frac{2\cdot\left(\frac{2+x}{2-x}-1\right)}{\frac{2+x}{2-x}+1}=\frac{4x}{4}=x$$

(e) Calculăm şi

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x) &= f(g(x))=\frac{2+g(x)}{2-g(x)}=\frac{2+2\cdot\frac{x-1}{x+1}}{2-2\cdot\frac{x-1}{x+1}}\\ &= \frac{x+1+x-1}{x+1-x+1}=x\,.\end{aligned}$$

Deci $(f\circ g)(x)=x, \forall x\in(0,\infty)$ şi $(g\circ f)(x)=x, \forall x\in(-2,2)$. Rezultă că f este inversabilă, inversa ei fiind g.

(f) Pentru orice $x\in G$ avem

$$\begin{aligned}f(x*y) &= \frac{2+x*y}{2-x*y}=\frac{2+\frac{4x+4y}{4+xy}}{2-\frac{4x+4y}{4+xy}}\\ &= \frac{8+2xy+4x+4y}{8+2xy-4x-4y}=\frac{(x+2)(y+2)}{(2-x)(2-y)}\\ &= f(x)f(y)\,.\end{aligned}$$

(g) Notăm $A = \frac{2}{2} * \frac{2}{4} * \frac{2}{6} * \ldots * \frac{2}{2006}$ şi calculăm

$$\begin{aligned} f(A) &= f\left(\frac{2}{2} * \frac{2}{4} * \frac{2}{6} * \ldots * \frac{2}{2006}\right) = f\left(\frac{2}{2}\right) f\left(\frac{2}{4}\right) f\left(\frac{2}{4}\right) \ldots f\left(\frac{2}{2006}\right) \\ &= \frac{2+\frac{2}{2}}{2-\frac{2}{2}} \cdot \frac{2+\frac{2}{4}}{2-\frac{2}{4}} \cdot \frac{2+\frac{2}{6}}{2-\frac{2}{6}} \cdot \ldots \cdot \frac{2+\frac{2}{2006}}{2-\frac{2}{2006}} \\ &= \frac{6}{2} \cdot \frac{10}{6} \cdot \frac{14}{10} \cdot \ldots \cdot \frac{4014}{4010} = \frac{4014}{2} = 2007 \end{aligned}$$

Deci

$$A = g(2007) = 2 \cdot \frac{2006}{2008} = \boxed{\frac{1003}{502}}$$

5. Subiectul IV

Rezolvare.

(a) $f(0) = \boxed{0}$ şi $g(0) = \operatorname{arctg} 0 = \boxed{0}$

(b)

$$\begin{aligned} g'(x) - f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2+x^2-1}{(x^2+1)^2} = \\ &= \boxed{\frac{2x^2}{(x^2+1)^2}} \end{aligned}$$

(c)

$$\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} \operatorname{arctg} x = 0 \cdot \frac{\pi}{2} = \boxed{0}$$

(d)

$$g'(x) = \frac{1}{x^2+1} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Rezultă că g este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

(e)

$$f(x) \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+1} \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2+2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 \geq 0$$

relaţie adevărată pentru orice x real.

$$f(x) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2-2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$$

relaţie adevărată pentru orice x real.

(f) Avem

$$\begin{aligned} \int_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx &= \int_0^1 x' \operatorname{arctg} x\, dx = x\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(x^2+1)\Big|_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}}. \end{aligned}$$

(g) Fie $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $h(x) = g(x) - f(x)$. Avem

$$h'(x) = g'(x) - f'(x) = \frac{2x^2}{(x^2+1)^2} > 0, \forall x \in (0, \infty)$$

Deci h este strict crescătoare. Rezultă $h(x) > h(0), \forall x > 0$, deci $h(x) > 0, \forall x > 0$. Obţinem $g(x) > f(x), \forall x > 0$.