BAC 2007

Pro–Didactica

Programa M1–2

Rezolvarea variantei 100

versiune finală

Redactia Pro–Didactica

Suportul pe net:
http://www.pro-didactica.ro/

CAPITOLUL 1

Varianta 100

1. Subiectul I.

Rezolvare.

(a) Lungimea segmentului $[AB]$ este

$$AB = \sqrt{(3+2)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{25+25} = \boxed{5\sqrt{2}}$$

(b) Aducem numărul complex din stânga la forma algebrică standard $(1+3i)(4-2i) = 4-2i+12i+6 = 10+10i$. Din egalitatea $10+10i = a+bi$ şi din faptul că $a, b \in \mathbb{R}$ rezultă $\boxed{a = 10, b = 10}$.

(c) Aria triunghiului echilateral cu latura de lungime $l = \sqrt{15}$ este

$$S = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \boxed{\frac{15\sqrt{3}}{4}}.$$

(d) Conjugatul numărului complex $-4-9i$ este $\boxed{-4+9i}$.

(e) Coordonatele punctelor A şi B verifică ecuaţia dreptei. Avem atunci

$$\begin{cases} 3-2a+b &= 0 \\ -2+3a+b &= 0 \end{cases}$$

Scăzând prima ecuaţie din a doua, obţinem $5a-5=0 \Rightarrow a=1$. Înlocuind acum a în prima ecuaţie, avem $3-2+b=0 \Rightarrow b=-1$. Deci $\boxed{a = 1, b = -1}$.

(f) Triunghiul ABC este dreptunghic cu ipotenuza BC. Aplicând teorema lui Pitagora, $BC = \sqrt{AB^2+AC^2} = \sqrt{9+64} = \boxed{\sqrt{73}}$.

2. Subiectul II.1

Rezolvare.

(a) Determinantul este egal cu $1 \cdot 30 - 2 \cdot 20 = \boxed{-10}$.

(b) Verificăm, pentru fiecare dintre cele 5 valori posibile ale lui n, dacă relaţia este adevărată : $3^1 = 3 < 28$, $3^2 = 9 < 28$, $3^3 = 27 < 28$, $3^4 = 81 > 28$, $3^5 = 243 > 28$. Cum inegalitatea este satisfăcută pentru două din cele cinci cazuri posibile, probabilitatea este $\boxed{\frac{2}{5}}$.

(c) Deoarece $64 = 2^6$ şi $32 = 2^5$, ecuaţia este echivalentă cu

$$2^{6x} = 2^5 \Leftrightarrow 6x = 5 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{5}{6}}$$

(d) Folosind faptul că $\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$, obţinem $x = 8^3 = \boxed{512}$.

(e) Deoarece $x^4 + 1 = (x^2 - x)(x^2 + x + 1) + x = 1$, câtul este $\boxed{x^2 - x}$, iar restul $\boxed{x + 1}$.

3. Subiectul II.2

Rezolvare.

(a) Pentru orice x real nenul, avem $f'(x) = (1 + x^{-4})' = \boxed{-\frac{4}{x^5}}$.

(b) Conform definiţiei derivatei unei funcţii într-un punct, limita cerută este $f'(1) = \boxed{-4}$.

(c) Cum $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{0_+} = +\infty$, dreapta $\boxed{x = 0}$ este asimptotă verticală pentru graficul lui f. Funcţia este continuă pe domeniul de definiţie, nu mai are alte asimptote verticale.

(d) $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx = \left(x - \frac{1}{3x^3}\right)\Big|_1^2 = 2 - \frac{1}{24} - 1 + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{31}{24}}$.

(e) Limita se scrie $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{f(\frac{1}{\sqrt{n}})}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + n^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + 1\right) = \boxed{1}$.

4. Subiectul III.

Rezolvare.

(a) Notând $u(i, j) = 2^i 3^j$, observăm că $A = \{u(i, j)/i, j \in \mathbb{N}\}$. Avem atunci succesiv $1 = 2^0 3^0 = u(0, 0) \in A$, $2 = 2^1 3^0 = u(1, 0) \in A$, $3 = 2^0 3^1 = u(0, 1) \in A$, $4 = 2^2 3^0 = u(2, 0) \in A$

(b) Presupunem că $5 \in A$. Rezultă că există $i, j \in \mathbb{N}$ astfel încât $5 = 2^i 3^j$ şi astfel $2^i 3^j$ se divide la 5. Contradicţie. Analog pentru 7.

(c) Notăm $P(n) : 1 + a + a^2 + ... + a^n = \dfrac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ şi demonstrăm prin inducţie că $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Verificarea. $P(0) : 1 = \dfrac{1 - a}{1 - a}$, $\forall a \neq 1$, este evident adevărată.

Pasul de inducţie. Presupunem $P(n)$ adevărată. Atunci pentru orice $a \neq 1$, avem

$$\begin{aligned} 1 + a + a^2 + ... + a^n + a^{n+1} &= \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} + a^{n+1} \\ &= \frac{1 - a^{n+1} + a^{n+1} - a^{n+2}}{1 - a} = \frac{1 - a^{n+2}}{1 - a} \end{aligned}$$

deci $P(n+1)$ este adevărată. Conform principiului inducţiei, demonstraţia este încheiată.

(d) Înlocuind în relaţia de la punctul precedent a cu $\frac{1}{2}$ obţinem

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^k}=\frac{1-\frac{1}{2^{k+1}}}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^k}<2,\ \forall k\in\mathbb{N}$$

(e) Înlocuind în relaţia de la punctul (c) a cu $\frac{1}{3}$ obţinem

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^s}=\frac{1-\frac{1}{3^{s+1}}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^s}<\frac{3}{2},\ \forall s\in\mathbb{N}$$

(f) Analizând descompunerile în factori primi a celor 20 de numere, obţinem $A\cap\{1,2,3,\ldots,20\}=\{1,2,3,4,6,8,9,12,16,18\}$. Deci intersecţia are $\boxed{10}$ elemente.

(g) Fie $a_1,a_2,\ldots,a_n\in A$, numere distincte. Considerăm p cea mai mare putere la care apare 2 şi q cea mai mare putere la care apare 3 în descompunerile numerelor date. Atunci folosind punctele (e) şi (f) avem

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}<\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^p}\right)\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^q}\right)<2\cdot\frac{3}{2}=3$$

5. Subiectul IV

Rezolvare.

(a) Pentru orice $x\in A$ avem $u'(x)=\boxed{\frac{-1}{(x+1)^2}+\frac{-1}{(x+2)^2}+\frac{-1}{(x+3)^2}}$.

(b) Prin calcul direct, pentru orice $x\in A$ avem

$$\begin{aligned} g(x)=f'(x) &= (x+1)'(x+2)(x+3)+(x+1)(x+2)'(x+3)\\ &\quad +(x+1)(x+2)(x+3)'\\ &= (x+2)(x+3)+(x+1)(x+3)+(x+1)(x+2)\\ &= \frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{x+1}+\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{x+2}\\ &\quad +\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{x+3}=f(x)u(x)\end{aligned}$$

(c) Deoarece pentru orice $x\in A$ avem $\frac{-1}{(x+1)^2}<0$, $\frac{-1}{(x+2)^2}<0$, $\frac{-1}{(x+3)^2}<0$, conform punctului (a) obţinem $u'(x)<0, \forall x\in A$.

(d) Utilizând punctul (b), pentru orice $x\in A$ are loc $u(x)=\frac{g(x)}{f(x)}$, de unde, prin derivare, rezultă

$$u'(x)=\frac{g'(x)f(x)-f'(x)g(x)}{f^2(x)}=\frac{h(x)f(x)-g^2(x)}{f^2(x)}$$

(e) Cum $\lim_{x\to\infty} u(x) = 0 + 0 + 0 = 0$, dreapta de ecuaţie $\boxed{y = 0}$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcţiei u.

(f) $\int_0^1 u(x)\,dx = (\ln|x+1| + \ln|x+2| + \ln|x+3|)\Big|_0^1 = \ln 2 + \ln 3 + \ln 4 - \ln 1 - \ln 2 - \ln 3 = \boxed{\ln 4}$

(g) Pentru $x \in A$, avem $u'(x) < 0$ conform punctului (c). De aici $f(x)h(x) < g^2(x)$, conform punctului (d). Rămâne să verificăm relaţia pentru $x \in \{-1, -2, -3\}$.
- cazul $x = -1$. Avem $f(-1)h(-1) = 0 < 2 = g^2(-1)$.
- cazul $x = -2$. Avem $f(-2)h(-2) = 0 < 1 = g^2(-2)$.
- cazul $x = -3$. Într-adevăr, $f(-3)h(-3) = 0 < 4 = g^2(-3)$.

Pro Didactica vă urează succes la BAC.
De la toamnă vă aşteptăm cu întrebări din materia de facultate.